

**Estatística Aplicada à Metrologia**  
»» Curso Online / Ao Vivo ««



Professor: Paulo Couto



---

# ESTATÍSTICA APLICADA À METROLOGIA

# MOTIVAÇÃO

## ABNT NBR ISO/IEC 17025:2017

Requisitos gerais para a competência de laboratórios de ensaio e calibração



- Necessidade de um sistema de gestão da qualidade implantando no laboratório;
- **Confiabilidade Metrológica:** Requer procedimentos, rotinas e métodos apropriados e que o processo deve ser contínuo, sem interrupção) ;
- Resultados de medições declarados com suas respectivas incertezas.

# MOTIVAÇÃO

## Requisitos da ISO/IEC 17025-2017

### 7.2 Seleção, verificação e validação de métodos

#### 7.2.1 Seleção e verificação de métodos

7.2.1.1 O laboratório deve utilizar métodos e procedimentos adequados para todas as atividades de laboratório e, quando apropriado, para a avaliação da incerteza de medição, bem como técnicas estatísticas para análise de dados.

#### 7.2.2 Validação de métodos

7.2.2.1 O laboratório deve validar métodos não normalizados, métodos desenvolvidos pelo laboratório e métodos normalizados utilizados fora de seu escopo pretendido ou modificados de outra forma. A validação deve ser tão abrangente quanto for necessária para atender às necessidades de uma determinada aplicação ou campo de aplicação.

7.2.2.3 As características de desempenho dos métodos validados, conforme avaliadas para o uso pretendido, devem ser pertinentes às necessidades dos clientes e consistentes com os requisitos especificados.

NOTA Características de desempenho podem incluir, mas não estão limitadas a, faixa de medição, exatidão de medição, incerteza de medição dos resultados, limite de detecção, limite de quantificação, seletividade do método, linearidade, repetibilidade ou reprodutibilidade, robustez contra influências externas ou sensibilidade cruzada contra interferência da matriz da amostra ou objeto de ensaio e tendência.

#### 7.6 Avaliação da incerteza de medição

7.6.1 Os laboratórios devem identificar as contribuições para a incerteza de medição. Ao avaliar a incerteza de medição, todas as contribuições que sejam significativas, incluindo aquelas oriundas da amostragem, devem ser consideradas utilizando-se métodos de análise apropriados.

# MOTIVAÇÃO

## Requisitos da ISO/IEC 17025-2017

**7.7.1** O laboratório deve ter um procedimento para monitorar a validade dos resultados. Os dados resultantes devem ser registrados de forma que as tendências sejam detectáveis e, quando praticável, **devem ser aplicadas técnicas estatísticas para a análise crítica dos resultados.** Este monitoramento deve ser planejado e analisado criticamente e deve incluir, quando apropriado, mas não estar limitado a:

- a) utilização de materiais de referência ou de materiais para controle da qualidade;
- b) utilização de instrumentação alternativa calibrada para fornecer resultados rastreáveis;
- c) checagens funcionais de equipamentos de medição e ensaio;
- d) uso de padrões de checagem ou padrões de trabalho com cartas de controle, quando aplicável;
- e) checagens intermediárias nos equipamentos de medição;
- f) ensaios ou calibrações replicadas, utilizando-se os mesmos métodos ou métodos diferentes;
- g) reensaio ou recalibração de itens retidos;
- h) correlação de resultados de características diferentes de um item;
- i) análise crítica de resultados relatados;
- j) comparações intralaboratoriais;
- k) ensaio de amostra(s) cega(s).

# MOTIVAÇÃO

## DOQ-CGRE-008- 2016 Orientações sobre validação de métodos analítico



Coordenação Geral de Acreditação

ORIENTAÇÃO SOBRE VALIDAÇÃO DE  
MÉTODOS ANALÍTICOS  
Documento de caráter orientativo

DOQ-CGRE-008

Revisão 07 – Julho 2018

### 8.2 Parâmetros de desempenho

Os parâmetros de desempenho devem estar claramente descritos no procedimento e relatório de validação e devem incluir, quando aplicável:

- Seletividade
- Linearidade / Faixa de trabalho / Faixa linear de trabalho / Sensibilidade
- Limite de Detecção (LD)
- Limite de Quantificação (LQ)
- Tendência/Recuperação
- Precisão ( repetibilidade, precisão intermediária e reprodutibilidade)
- Robustez (\*)

# MOTIVAÇÃO

---

## VALIDAÇÃO

VIM 2012/ ISO NBR 17025

### 2.45

#### **validação**

*validation*

*validation*

*validación*

**Verificação** na qual os requisitos especificados são adequados para um uso pretendido.

## VERIFICAÇÃO / ISO NBR 17025

### 3.8

#### **verificação**

fornecimento de evidência objetiva de que um dado item atende a requisitos especificados

**EXEMPLO 1** Confirmação de que um dado material de referência, como declarado, é homogêneo para o valor e para o procedimento de medição em questão, até uma porção do material sob medição, com massa de 10 mg.

# MOTIVAÇÃO

---

## VALIDAÇÃO

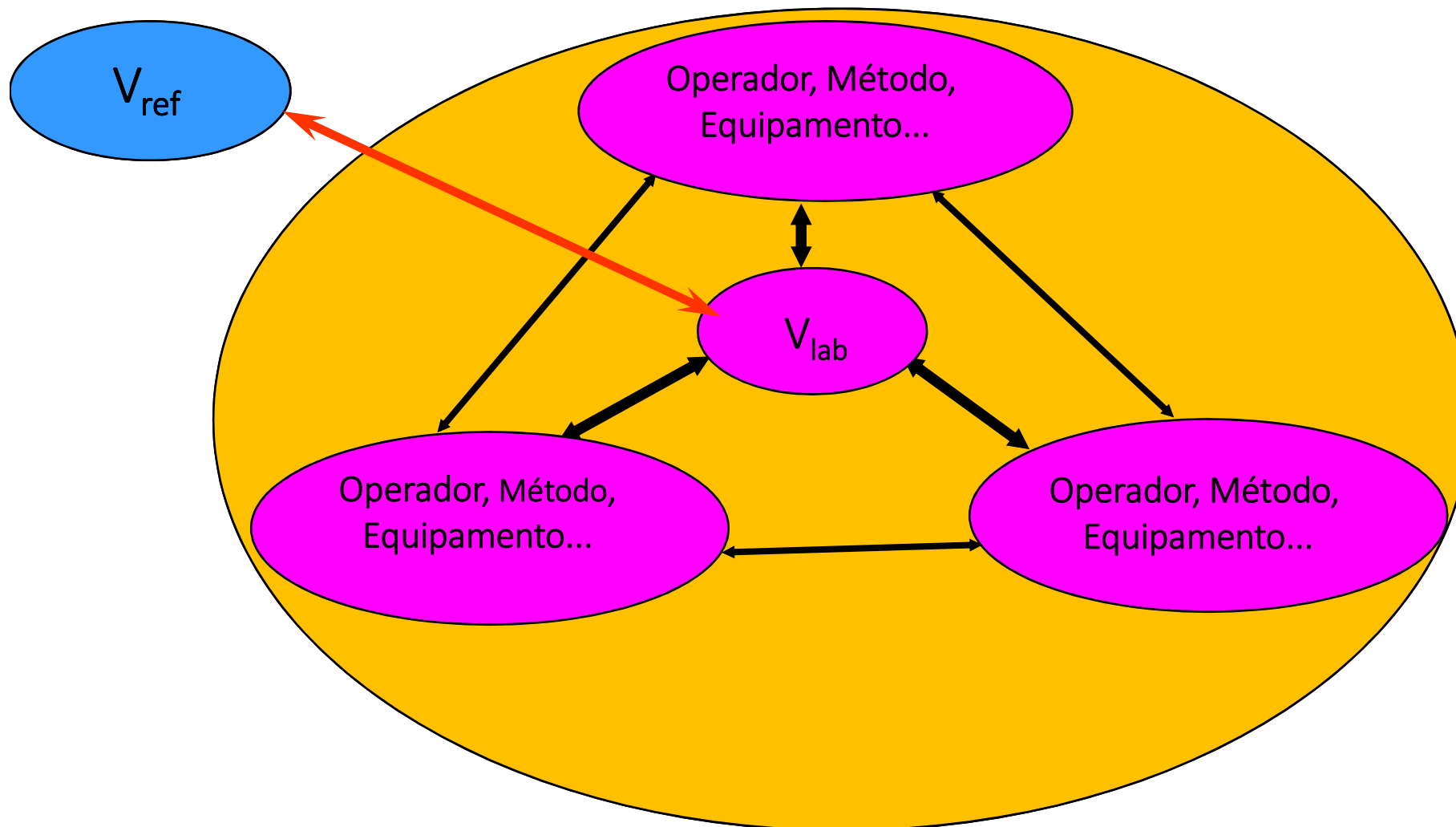
A premissa básica da metrologia é que nenhuma medição está isenta de erro. Ou na lógica positiva: toda medição possui erro.

Na metrologia, como na física, existe o princípio desconfortável da indeterminação.

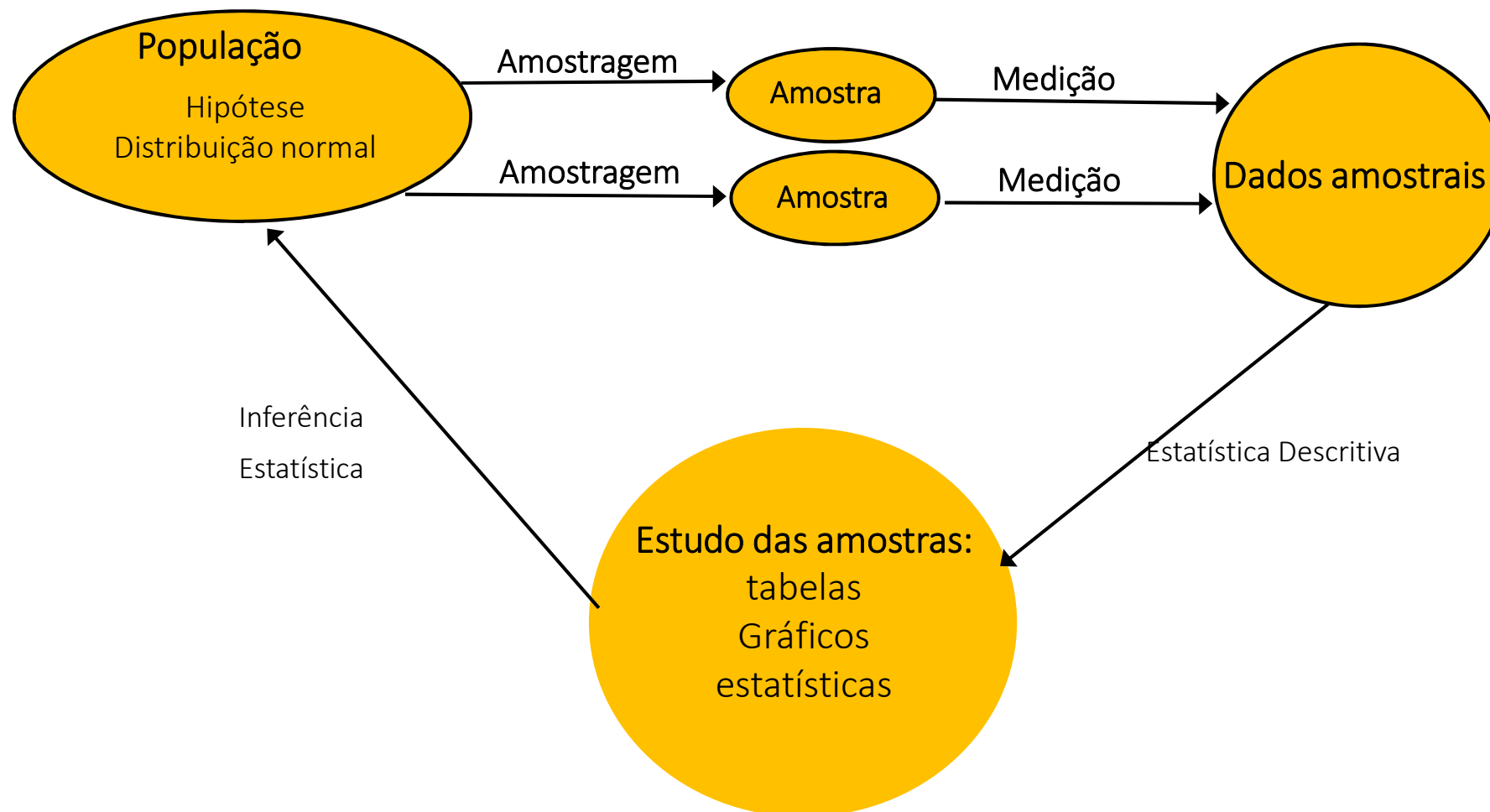
As incertezas e os erros da medição devem ser tratados metodicamente para que as medições práticas tenham alguma utilidade e confiabilidade.

O tratamento estatístico de um conjunto de dados permite fazer julgamentos objetivos relacionados com a validade de resultados.

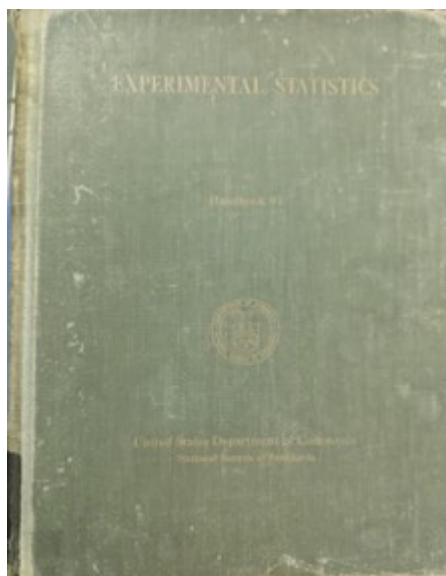
## OBJETIVO GERAL DA ESTATÍSTICA APLICADA À METROLOGIA



## OBJETIVO GERAL DA ESTATÍSTICA APLICADA À METROLOGIA



# LITERATURAS BÁSICAS DE ESTATÍSTICA UTILIZADAS



NBS Special Publication 747

*Statistical Concepts in Metrology – With a Postscript on Statistical Graphics*

Harry H. Ku

Statistical Engineering Division  
Center for Computing and Applied Mathematics  
National Engineering Laboratory  
National Bureau of Standards  
Gaithersburg, MD 20899

August 1988



U.S. Department of Commerce  
C. William Taylor, Secretary  
National Bureau of Standards  
David A. Holte, Director



## ESTATÍSTICA APLICADA À METROLOGIA

---

A metrologia utiliza a estatística por vários objetivos, dentre eles:

- Entender, controlar e determinar os erros da medição;
- Facilitar a coleta de dados adequados e confiáveis relacionados com a medição;
- Entender e calcular melhor as incertezas associadas à medição;
- Controlar a qualidade da mão de obra e dos materiais produzidos na indústria.

Os métodos estatísticos podem ser úteis para determinar:

- O valor mais provável de uma medição, a partir de um conjunto limitado de medições,
- O erro provável de uma medição;
- O valor da incerteza na melhor resposta obtida.

# ESTATÍSTICA APLICADA À METROLOGIA

---

Dados quantitativos dos tipos discreto e contínuo.

Os dados quantitativos podem ser diferenciados entre os tipos discreto e contínuo.

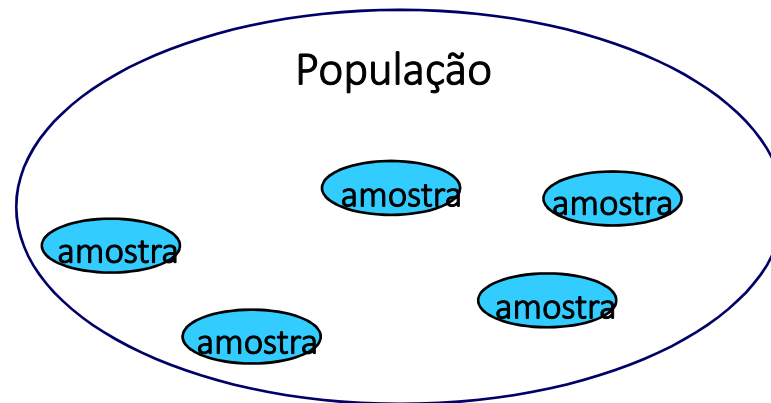
Os dados discretos resultam de um conjunto finito de valores possíveis. ( Ou seja o número de valores possíveis é 0, ou 1, ou 2 etc.).

Os dados contínuos (numéricos) resultam de um número infinito de valores possíveis que podem ser associados a pontos em uma escala contínua de tal maneira que não haja lacunas e interrupções.

# ESTATÍSTICA APLICADA À METROLOGIA

A população ou universo é o conjunto de todos os itens.

A amostra é uma parte da população, tirada aleatoriamente do universo de modo que o represente.



- a maneira de selecionar amostras é por demais importante de modo que sejam representativas de uma população. Para isso, deve-se fazer uma amostragem aleatória, a fim de evitar uma escolha tendenciosa.

Existem várias razões para se proceder a uma amostragem:

- É mais econômico que realizar um censo, por exemplo;
- Apresenta rapidamente resultados;
- Evita desperdício de material, uma vez que toda a população não necessita ser destruída, em caso de testes de controle de qualidade (Ensaio destrutivo).

## ESTATÍSTICA APLICADA À METROLOGIA

---

Parâmetro é uma medida numérica que descreve uma característica de uma população.

Estatística é uma medida numérica que descreve uma característica de uma amostra.

### Controle de Qualidade em uma Fábrica de Parafusos

**População:** conjunto de todos os parafusos fabricados, utilizando o mesmo processo.

**Amostra:** conjunto de parafusos escolhidos de forma aleatória entre os lotes de parafusos produzidos.

**Problema:** A partir da porcentagem de parafusos defeituosos presentes na amostra (estatística), pode-se “estimar (inferir)” a porcentagem de defeituosos (parâmetro) em toda a produção.

## ESTATÍSTICA APLICADA À METROLOGIA

- Estatística é enfocada sob dois aspectos: probabilidade e inferência estatística.

As leis da probabilidade usadas pela estatística se aplicam somente a erros aleatórios e não aos erros sistemáticos ou do operador.

Deste modo, antes de fazer o tratamento estatístico dos erros aleatórios, deve-se cuidar de eliminar ou diminuir os erros sistemáticos e evitar os erros de operação.

A inferência estatística diz respeito ao uso de amostras para obter conclusões gerais acerca da população. A inferência estatística pode ser abordada quanto à:

- estimação de parâmetros ( $\mu$  e  $\sigma$ );
- estimação do intervalo de confiança; ( $IC = \bar{X} \pm ts$ )
- teste de hipóteses ( $H_0$  e  $H_1$ ).

# TESTES DE HIPÓTESES

---

**Testes de hipóteses** : É uma regra de decisão para aceitar ou rejeitar uma hipótese estatística com base nos elementos amostrais.

## HIPÓTESE ESTATÍSTICA

Trata-se de uma suposição quanto ao valor de um parâmetro populacional, ou quanto à natureza da distribuição de probabilidade de uma variável populacional.

## TIPOS DE HIPÓTESES

Designa-se por  $H_0$ , chamada hipótese nula, a hipótese estatística a ser testada, e por  $H_1$ , a hipótese alternativa.

A hipótese nula expressa uma igualdade, enquanto a hipótese alternativa é dada por uma desigualdade.

$$\text{Ex: } H_0: \mu = 1,65 \text{ m}$$

$$H_1: \mu \neq 1,65 \text{ m}$$

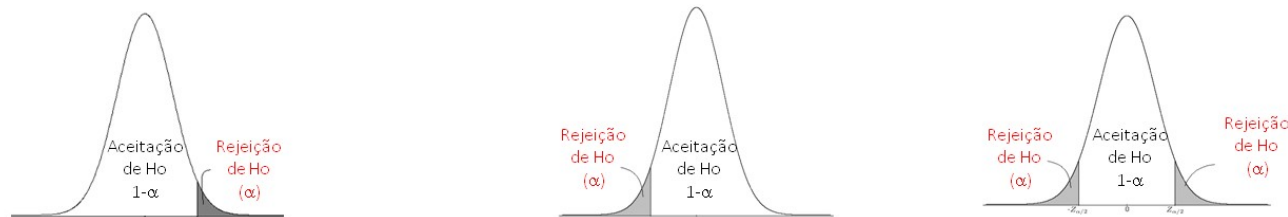
## NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA E NÍVEL DE CONFIANÇA

### Nível de significância ( $\alpha$ ):

-É a probabilidade da estatística do teste cair na região crítica (RC) quando a hipótese nula for verdadeira. A significância estatística significa que uma diferença entre dois números é considerada real.

### Nível de confiança:

-Probabilidade ( $1 - \alpha$ ) que é a proporção de vezes que o intervalo de confiança realmente contém o parâmetro populacional (Região de Aceitação - RA).



Erro Tipo I ou  $\alpha$  Rejeitar  $H_0$  quando ela é uma verdade.

Erro Tipo II ou  $\beta$  Aceitar  $H_0$  quando ela é falsa.

### Ensaio clínico

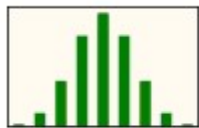
Erro Tipo I ou  $\alpha$  Rejeitar que a pessoa esteja sadia quando ela está sadia. **Falso positivo.**

Erro Tipo II ou  $\beta$  Aceitar que a pessoa esteja sadia quando ela não está sadia. **Falso negativo**

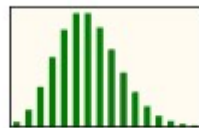
# DISTRIBUIÇÕES

Se as causas que produzem as medições de dados permanecem inalteradas, a distribuição tende a ter certas características estáveis, que se tornam ainda mais definidas quando se aumenta o número de medições.

## Distribuições de Dados Discretos



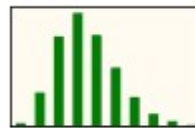
Binomial



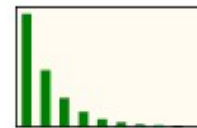
Poisson



Hypergeometric



Neg Binomial

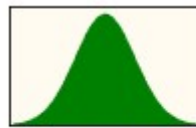


Geometric

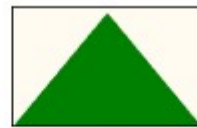


Discrete Uniform

## Distribuições de Dados Contínuos



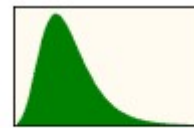
Normal



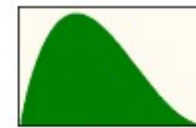
Triangular



Uniform



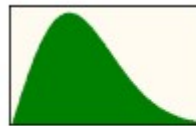
Lognormal



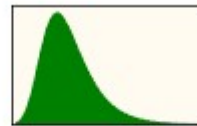
Beta



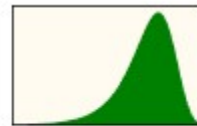
Bimodal



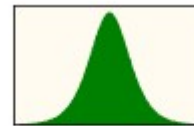
Weibull



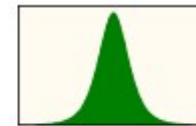
Max Extreme



Min Extreme



Logistic



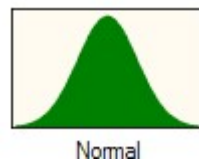
Student's t

## TESTES DE NORMALIDADE

- Alguns métodos de Inferência Estatística partem do pressuposto de normalidade dos dados.
- A qualidade das inferências feitas por estes métodos depende de quão próxima a distribuição da população em estudo é normal.
- Procedimentos para verificação de dados que apresentam desvios da suposição de normalidade se fazem necessários.

### Alguns testes de normalidade:

- Teste Shapiro-Wilk;
- Teste de Anderson-Darling;
- Teste de Qui-Quadrado;
- Teste de Kolmogorov-Smirnov.



# TESTES DE NORMALIDADE

---

## Teste Shapiro-Wilk

Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de uma amostra aleatória de uma população  $x$  com função (densidade) de probabilidade  $f$  desconhecida e  $f_0$  a função (densidade) de probabilidade proposta.

Hipóteses a testar:

$$H_0: f(x) = f_0(x)$$

$$H_1: f(x) \neq f_0(x)$$

*Biometrika* (1965), 52, 3 and 4, p. 591

*With 5 text-figures*

*Printed in Great Britain*

### **An analysis of variance test for normality (complete samples)†**

BY S. S. SHAPIRO AND M. B. WILK

*General Electric Co. and Bell Telephone Laboratories, Inc.*

# TESTES DE NORMALIDADE

## Teste Shapiro-Wilk

O teste Shapiro-Wilk, proposto em 1965, calcula uma estatística  $W$  que testa se uma amostra aleatória de tamanho  $n$  provém de uma distribuição normal. Valores pequenos de  $W$  são evidência de desvios da normalidade.

Hipóteses a testar:

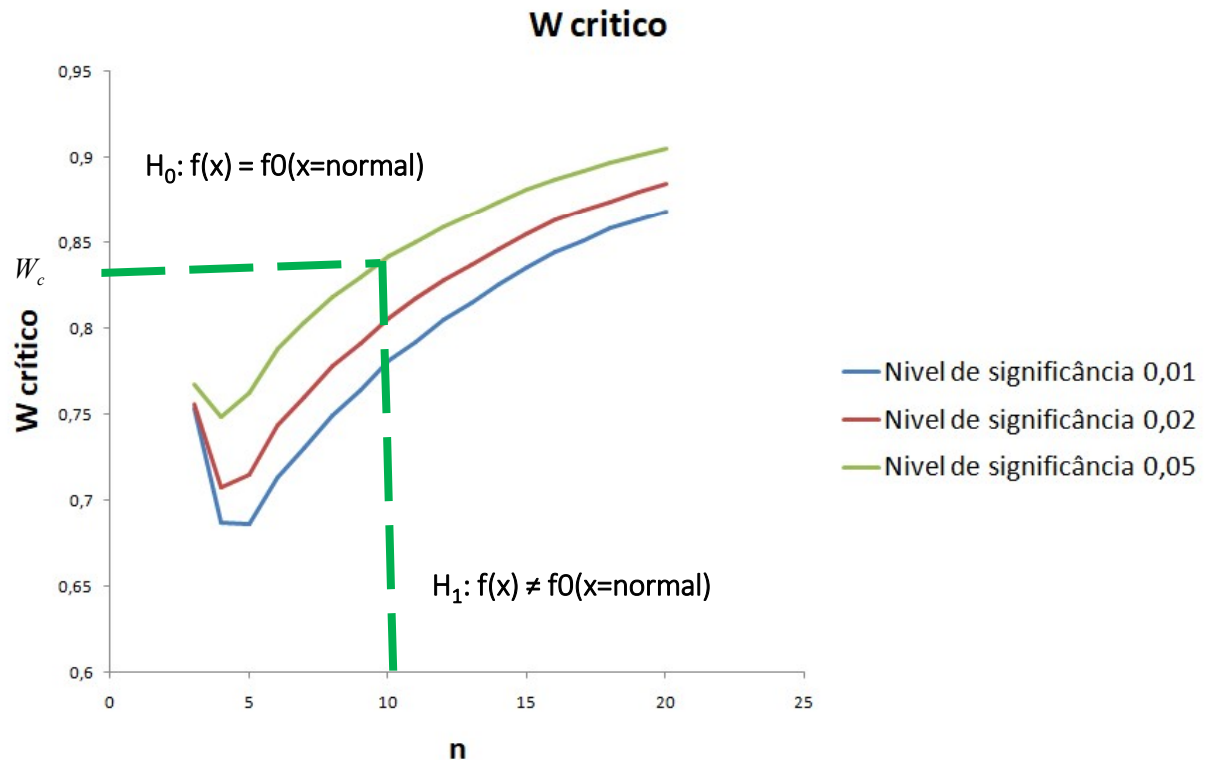
$$H_0: f(x) = f_0(x=\text{normal})$$

$$H_1: f(x) \neq f_0(x=\text{normal})$$

A Hipótese  $H_0$  é aceita se

$$W_{\text{calculado}} \geq W_{\text{crítico}}$$

↓  
O dados possuem  
distribuição normal



## TESTES DE NORMALIDADE

### Teste Shapiro-Wilk

O teste de Shapiro-Wilk, é baseado na estatística  $W_{\text{calculado}}$  a qual é definida pela expressão:

$$W_{\text{calculado}} = \frac{b^2}{S^2} = \frac{[\sum_{i=1}^K a_{n-i+1} \cdot (x_{n-i+1} - x_i)]^2}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$a_{n-i+1}$  são constantes tabeladas geradas pelas médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho “ $n$ ” de uma distribuição normal.

i	n								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739
2	-	0	0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291
3	-	-	-	0	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141
4	-	-	-	-	-	0,0000.	0,0561	0,0947	0,1224
5	-	-	-	-	-	-	-	0	0,0399

# TESTES DE NORMALIDADE

## Teste Shapiro-Wilk

Exemplo

$$a_{n-i+1} \quad n = 6$$

i	n								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739
2	-	0	0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291
3	-	-	-	0	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141
4	-	-	-	-	-	0,0000	0,0561	0,0947	0,1224
5	-	-	-	-	-	-	-	0	0,0399

$$a_{n-i+1} = a_{6-1+1} = a_6$$

$$a_{n-i+1} = a_{6-2+1} = a_5$$

$$a_{n-i+1} = a_{6-3+1} = a_4$$

$x_1$

$$x_{n-i+1} - x_i$$

$$a_{n-i+1} \cdot (x_{n-i+1} - x_i)$$

$$b^2 = \left[ \sum_{i=1}^K a_{n-i+1} \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2$$

$x_2$

$$x_{6-1+1} - x_1 = x_6 - x_1$$

$$a_6 \cdot (x_6 - x_1)$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^K (x_i - \bar{x}_i)^2$$

$x_3$

$$x_{6-2+1} - x_2 = x_5 - x_2$$

$$a_5 \cdot (x_5 - x_2)$$

$$W_{calc} = \frac{b^2}{S^2}$$

$x_4$

$x_5$

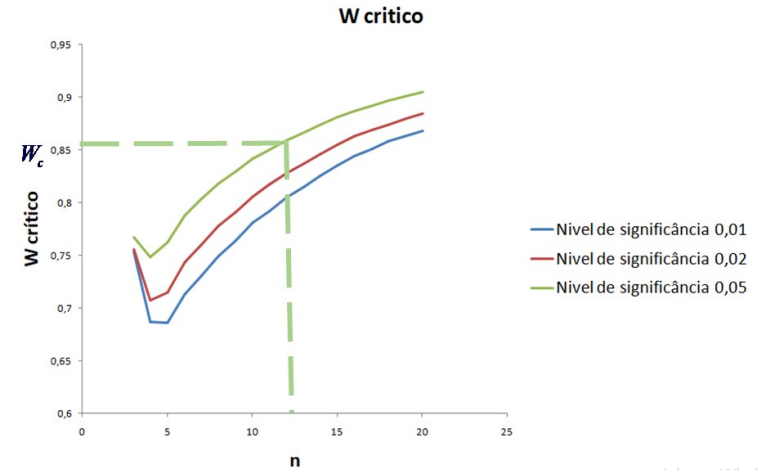
$x_6$

# TESTES DE NORMALIDADE

## Teste Shapiro-Wilk

Tabela de  $W_{crítico}$

n	Nível de significância $\alpha$								
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,98	0,99
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959	0,998	0,999	1	1
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	0,987	0,992	0,996	0,997
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	0,979	0,986	0,991	0,993
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	0,974	0,981	0,986	0,989
7	0,73	0,76	0,803	0,838	0,928	0,972	0,979	0,985	0,988
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	0,972	0,978	0,984	0,987
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	0,972	0,978	0,984	0,986
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	0,972	0,978	0,983	0,986
11	0,792	0,817	0,85	0,876	0,94	0,973	0,979	0,984	0,986
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943	0,973	0,979	0,984	0,986
13	0,815	0,837	0,866	0,889	0,945	0,974	0,979	0,984	0,986
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,945	0,975	0,98	0,984	0,986
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,95	0,975	0,98	0,984	0,987
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952	0,976	0,981	0,985	0,987
17	0,851	0,869	0,892	0,91	0,954	0,977	0,981	0,985	0,987
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956	0,978	0,982	0,986	0,988
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957	0,978	0,982	0,986	0,988
20	0,868	0,884	0,905	0,92	0,959	0,979	0,983	0,986	0,988



A Hipótese  $H_0$  é aceita se

$$W_{calculado} \geq W_{crítico}$$



O dados possuem distribuição normal

# TESTES DE NORMALIDADE

## Teste Shapiro-Wilk

### Exercício

$n = 10$

$a_{n-i+1}$

$x_i$ (mm)
2,547
2,549
2,553
2,555
2,557
2,559
2,561
2,565
2,567
2,597

i	n									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	$a_{10-1+1}$
2	-	0	0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	$a_{10-2+1}$
3	-	-	-	0	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	$a_{10-3+1}$
4	-	-	-	-	-	0,0000	0,0561	0,0947	0,1224	$a_{10-4+1}$
5	-	-	-	-	-	-	-	0	0,0399	$a_{10-5+1}$

$$i = 1 \rightarrow a_{10-1+1} = a_{10} = 0,5739 \quad i = 2 \rightarrow a_{10-2+1} = a_9 = 0,3291$$

$$i = 3 \rightarrow a_{10-3+1} = a_8 = 0,2141 \quad i = 3 \rightarrow a_{10-4+1} = a_7 = 0,1224$$

$$i = 3 \rightarrow a_{10-5+1} = a_6 = 0,0399$$

## TESTES DE NORMALIDADE

### Teste Shapiro-Wilk

#### Exercício

$$(x_{n-i+1} - x_i)$$

$$a_{n-i+1} \cdot (x_{n-i+1} - x_i)$$

$$i = 1 \rightarrow (x_{10-1+1} - x_1) = (x_{10} - x_1)$$

$$a_{10}(x_{10} - x_1) = 0,5759(2,597 - 2,547) = 0,028695$$

$$i = 2 \rightarrow (x_{10-2+1} - x_2) = (x_9 - x_2)$$

$$a_9(x_9 - x_2) = 0,3291(2,567 - 2,549) = 0,005924$$

$$i = 3 \rightarrow (x_{10-3+1} - x_3) = (x_8 - x_3)$$

$$a_8(x_8 - x_3) = 0,2141(2,565 - 2,553) = 0,002569$$

$$i = 4 \rightarrow (x_{10-4+1} - x_4) = (x_7 - x_4)$$

$$a_7(x_7 - x_4) = 0,1224(2,561 - 2,555) = 0,000734$$

$$i = 5 \rightarrow (x_{10-5+1} - x_5) = (x_6 - x_5)$$

$$a_5(x_6 - x_5) = 0,0399(2,559 - 2,557) = 0,000080$$

$$b^2 = \left[ \sum_{i=1}^k a_{n-i+1} + (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2 = 0,00144$$

## TESTES DE NORMALIDADE

### Teste Shapiro-Wilk

Exercício

$x_i$ (mm)	$x_i$ -Média	$(x_i$ -Média) <sup>2</sup>
2,547	-0,014	0,000196
2,549	-0,012	0,000144
2,553	-0,008	6,4E-05
2,555	-0,006	3,6E-05
2,557	-0,004	1,6E-05
2,559	-0,002	4E-06
2,561	0	0
2,565	0,004	1,6E-05
2,567	0,006	3,6E-05
2,597	0,036	0,001296
Média	2,561	
	$S^2$	0,001808

$$S^2 = \sum_{i=1}^K (x_i - \bar{x}_i)^2 = 0,001808$$

$$b^2 = \left[ \sum_{i=1}^k a_{n-i+1} + (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2 = 0,00144$$

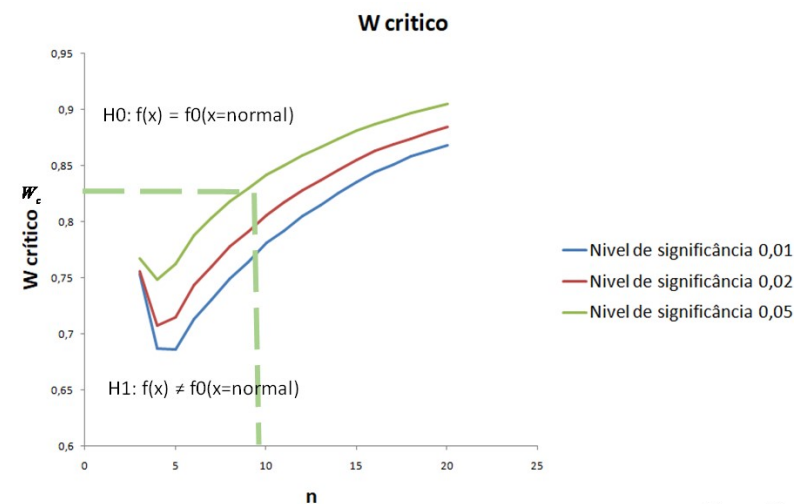
$$W_{\text{calculado}} = \frac{b^2}{S^2} = \frac{0,00144}{0,001808} = 0,799$$

# TESTES DE NORMALIDADE

## Teste Shapiro-Wilk

### Exercício

n	Nível de significância $\alpha$								
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,98	0,99
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959	0,998	0,999	1	1
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	0,987	0,992	0,996	0,997
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	0,979	0,986	0,991	0,993
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	0,974	0,981	0,986	0,989
7	0,73	0,76	0,803	0,838	0,928	0,972	0,979	0,985	0,988
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	0,972	0,978	0,984	0,987
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	0,972	0,978	0,984	0,986
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	0,972	0,978	0,983	0,986
11	0,792	0,817	0,85	0,876	0,94	0,973	0,979	0,984	0,986
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943	0,973	0,979	0,984	0,986
13	0,815	0,837	0,866	0,889	0,945	0,974	0,979	0,984	0,986
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,945	0,975	0,98	0,984	0,986
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,95	0,975	0,98	0,984	0,987
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952	0,976	0,981	0,985	0,987
17	0,851	0,869	0,892	0,91	0,954	0,977	0,981	0,985	0,987
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956	0,978	0,982	0,986	0,988
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957	0,978	0,982	0,986	0,988
20	0,868	0,884	0,905	0,92	0,959	0,979	0,983	0,986	0,988



$$W_{\text{crítico}} = 0,842$$

$$W_{\text{calculado}} = 0,799$$

$$W_{\text{calculado}} < W_{\text{crítico}}$$

Os dados não seguem a distribuição normal porque  $W_{\text{calculado}} < W_{\text{crítico}}$ .

## MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Nas distribuições formadas pelos dados, quase sempre há uma tendência central destes dados.

- **MODA** de um conjunto de dados é valor que ocorre com mais frequência.

Exemplo - o conjunto 2;2;5;7;9;9;9;10;10;11;12;18 tem moda 9.

- **MEDIANA** de um conjunto de valores é o valor do meio desse conjunto, quando os valores estão dispostos em ordem crescente (ou decrescente).

Exemplo - o conjunto 3;4;5; 6;8;9;10 tem mediana 6.

- **MÉDIA**

Aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Ponderada

$$\bar{x}_P = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Geométrica

$$\bar{x}_G = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{1/n}$$

Harmônica

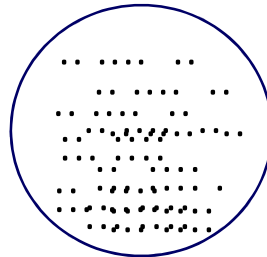
$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

## MEDIDAS DE DISPERSÃO

$k$		Média
1		5
2		5
3		5

$k$	Valores					Média
1	5	6	6	3	5	5
2	12	1	3	4	5	5
3	25	0	0	0	0	5

A medida de tendência central isolada não dá uma descrição adequada dos dados experimentais. Deve-se considerar também a variabilidade, dispersão ou espalhamento dos dados.



A dispersão dos dados experimentais pode ser avaliada por:

- Amplitude;
- Desvio-Padrão;
- Variância;
- Desvio-Padrão relativo;
- Coeficiente de variação;
- Desvio absoluto da média;
- Desvio absoluto da mediana ( median absolute deviation - *MAD*);
- Gráfico box-plot;
- Teorema Tchebychev Pafnouti.

## MEDIDAS DE DISPERSÃO

- Amplitude

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

- Desvio absoluto da média

$$d = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

- Variância e Desvio padrão

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- Coeficiente de variação

$$CV (\%) = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

## MEDIDAS DE DISPERSÃO

Uma boa aproximação de  $s$  e, portanto, uma estimativa de  $s$  podem ser obtidas dividindo a amplitude por uma constante  $d_n$  ou  $d_2$  (os símbolos habituais no processo estatístico e na literatura de controle de qualidade).

The coefficient  $d_2$  (or  $d_n$ )

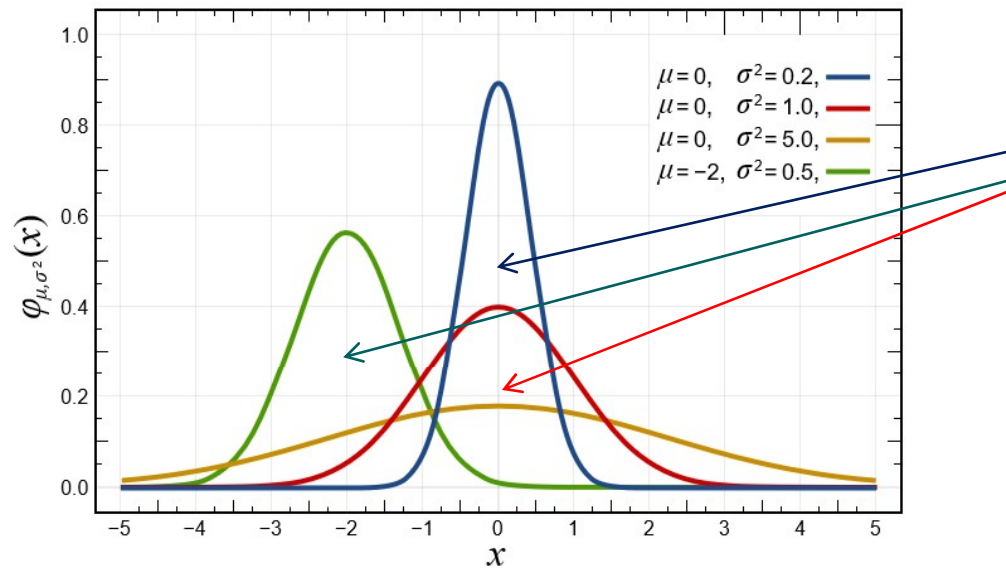
No. of sets ( $k$ )	Number of replicates in a set ( $n$ )							
	2	3	4	5	6	7	8	10
1	1.41	1.91	2.24	2.48	2.67	2.82	2.95	3.16
3	1.23	1.77	2.12	2.38	2.58	2.75	2.89	3.11
5	1.19	1.74	2.10	2.36	2.56	2.73	2.87	3.10
10	1.16	1.72	2.08	2.34	2.55	2.72	2.86	3.09
$\infty$	1.13	1.69	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	3.08

$$s = \frac{R}{d_2} = \frac{R}{d_n}$$

Massart

Os seguintes resultados foram obtidos em ordem cronológica: 2,3; 2,8; 2,2; 2,9; 2,7; 2,4. A amplitude é 0,7 e  $s$  estimado a partir da amplitude  $R$ , portanto,  $0,7/2,67 = 0,26$ . A estimativa com de  $s$  eq. (tradicional) teria produzido  $s = 0,29$ .

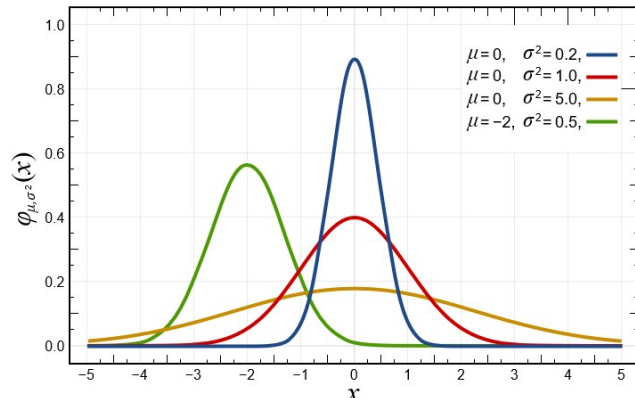
# DISTRIBUIÇÃO NORMAL



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

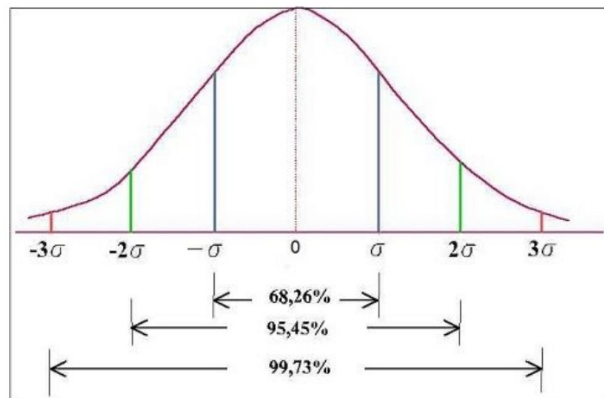
- $x$ : valores da variável aleatória ( $-\infty < x < +\infty$ )
- $f(x)$ : função densidade probabilidade da variável aleatória  $x$ 
  - $\mu$ : média da população;
  - $\sigma$ : desvio-padrão da população.

# DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA

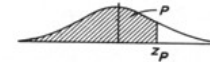


$$z = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

Distribuição normal padronizada



CUMULATIVE NORMAL DISTRIBUTION — VALUES OF P



Values of P corresponding to  $x_p$  for the normal curve.

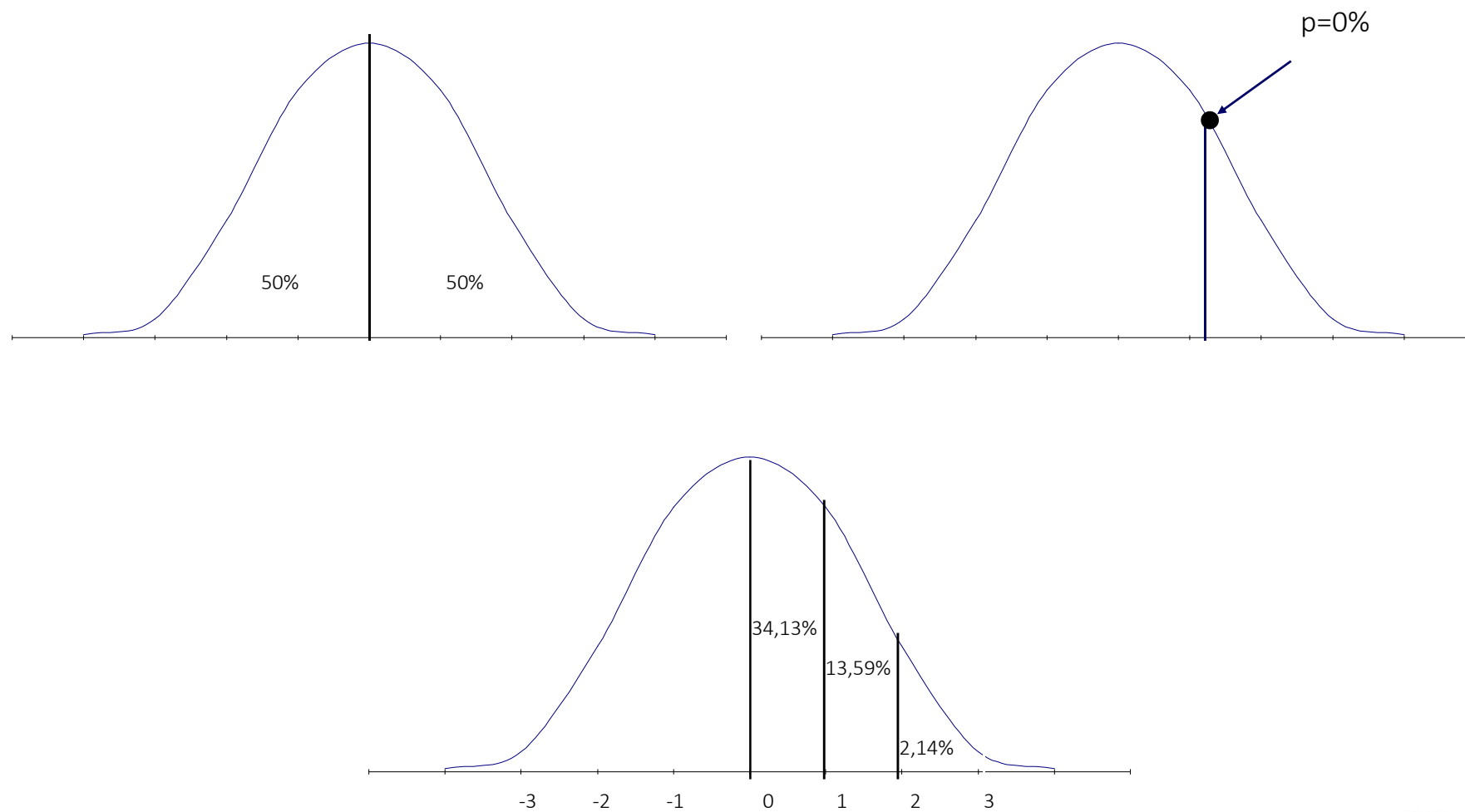
$x$  is the standard normal variable. The value of P for  $-x_p$  equals one minus the value of P for  $+x_p$ , e.g., the P for  $-1.62$  equals  $1 - .9474 = .0526$ .

$z_p$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.2	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Ref: Natrella

# DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA

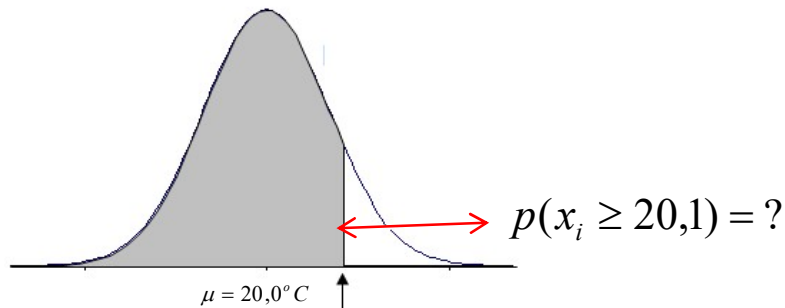
## ALGUMAS PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA



# DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA

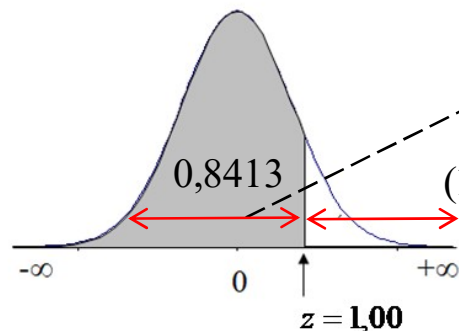
A medição da temperatura de uma sala foi realizada em número grande de repetições e o resultado foi :  $\mu = 20,0^{\circ}C$  e  $\sigma = 0,1^{\circ}C$ . Qual a probabilidade de ocorrência de valores  $x_i > 20,1^{\circ}C$  ?

= DIST.NORMP(Z) =84,13%



$$z = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{20,1 - 20,0}{0,1} = 1,00$$

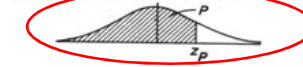
Distribuição normal padronizada



$$(1 - 0,8413) * 100 = 15,87\%$$

A probabilidade de ocorrência de valores maiores do que  $20,1^{\circ}C$  é 15,87%.

CUMULATIVE NORMAL DISTRIBUTION — VALUES OF P



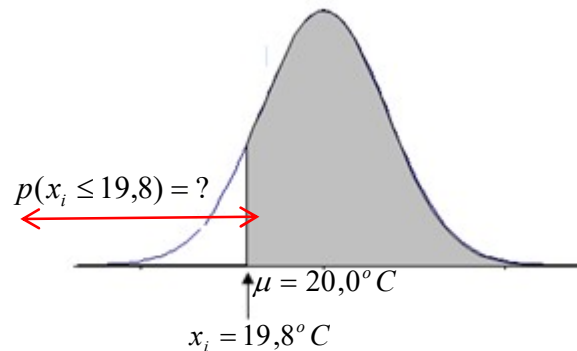
Values of P corresponding to  $z_p$  for the normal curve.

$z$  is the standard normal variable. The value of P for  $-z_p$  equals one minus the value of P for  $+z_p$ , e.g., the P for  $-1.62$  equals  $1 - .9474 = .0526$ .

$z_p$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

# DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA

A medição da temperatura de uma sala foi realizada em número grande de repetições e o resultado foi :  $\mu = 20,0^{\circ}C$  e  $\sigma = 0,1^{\circ}C$  . Qual a probabilidade de ocorrência de valores  $x_i < 19,8^{\circ}C$  ?



$$z = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{19,8 - 20,0}{0,1} = -2,00$$

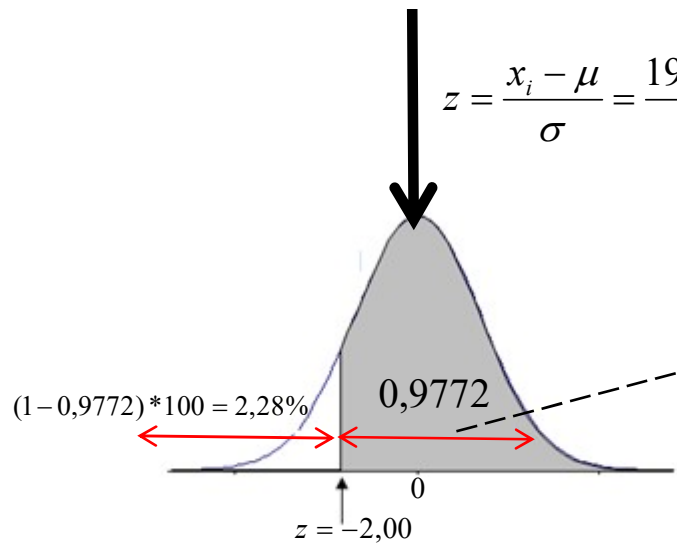
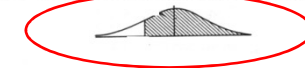


TABLE A-1. CUMULATIVE NORMAL DISTRIBUTION — VALUES OF P



Values of P corresponding to  $z_p$  for the normal curve.

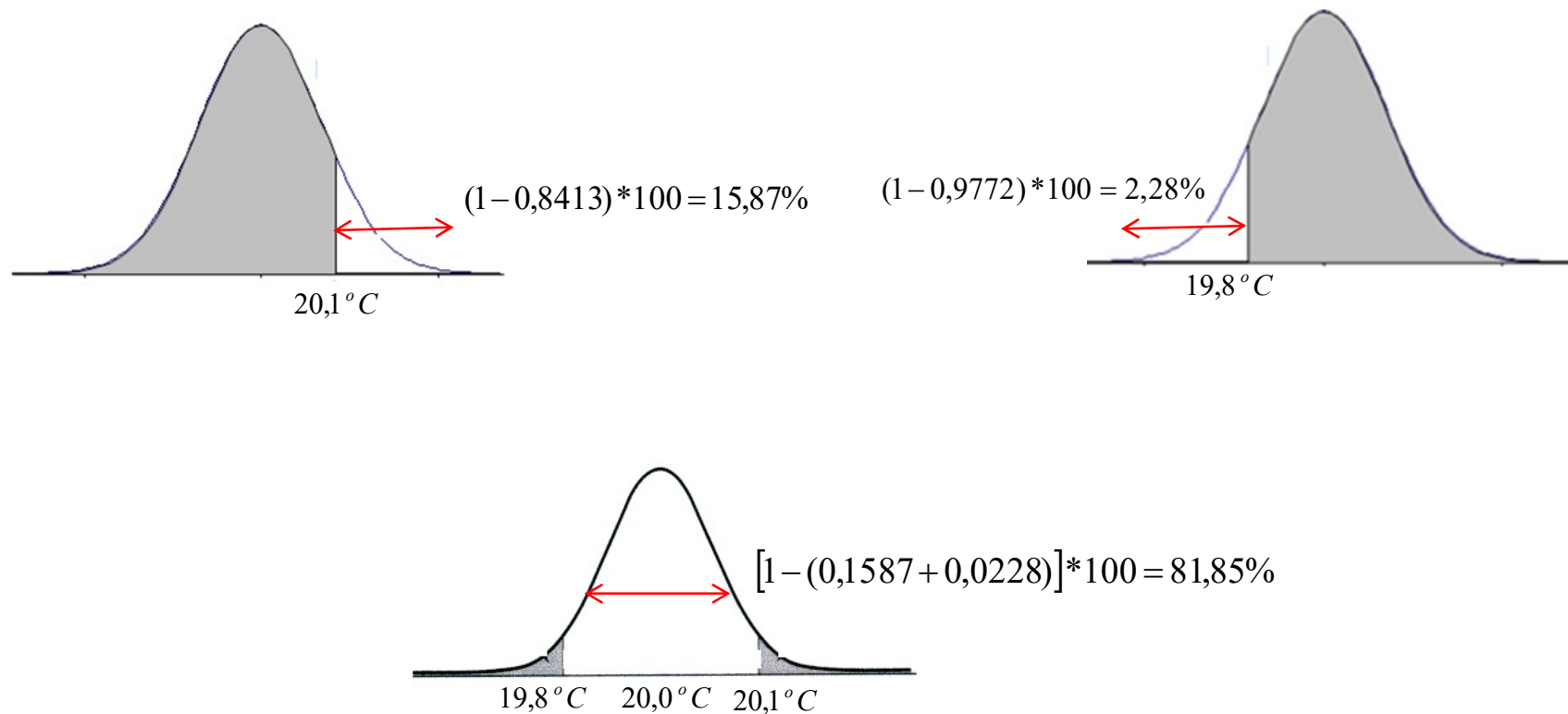
$z$  is the standard normal variable. The value of P for  $-z_p$  equals one minus the value of P for  $+z_p$ . e.g., the P for  $-1.62$  equals  $1 - .9474 = .0526$ .

$z_p$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.2	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

A probabilidade de ocorrência de valores menores do que  $19,8^{\circ}C$  é 2,28%.

## DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA

A medição da temperatura de uma sala foi realizada em número grande de repetições e o resultado foi :  $\mu = 20,0^{\circ}C$  e  $\sigma = 0,1^{\circ}C$  . Qual a probabilidade de ocorrência de valores  $19,8^{\circ} < x_i < 20,1^{\circ}C$  ?



# DISTRIBUIÇÃO t DE STUDENT

$v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5$   
 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_4 > \sigma_5$   
 $t_1 > t_2 > t_3 > t_4 > t_5$

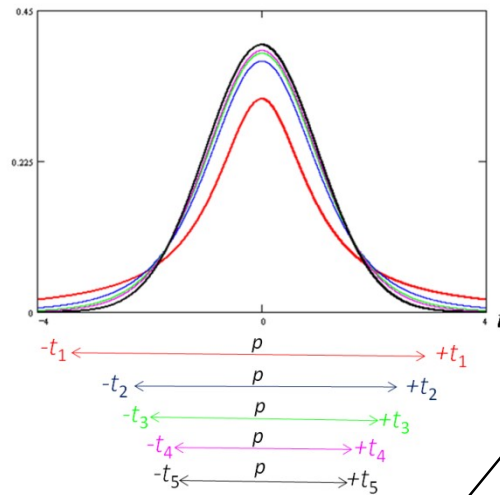
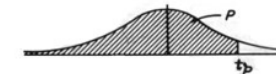


TABLE A-4. PERCENTILES OF THE t DISTRIBUTION



df	t <sub>.60</sub>	t <sub>.70</sub>	t <sub>.80</sub>	t <sub>.90</sub>	t <sub>.95</sub>	t <sub>.975</sub>	t <sub>.99</sub>	t <sub>.995</sub>
1	.325	.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.289	.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.277	.584	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.271	.569	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.267	.559	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.265	.553	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.263	.549	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.262	.546	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.261	.543	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.260	.542	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.260	.540	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.259	.539	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.259	.538	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.258	.537	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.258	.536	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.258	.535	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.257	.534	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.257	.534	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.257	.533	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.257	.533	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.257	.532	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.256	.532	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.256	.532	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.256	.531	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.256	.531	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.256	.531	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.256	.531	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.256	.530	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.256	.530	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.256	.530	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.255	.529	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.254	.527	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.254	.526	.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.253	.524	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

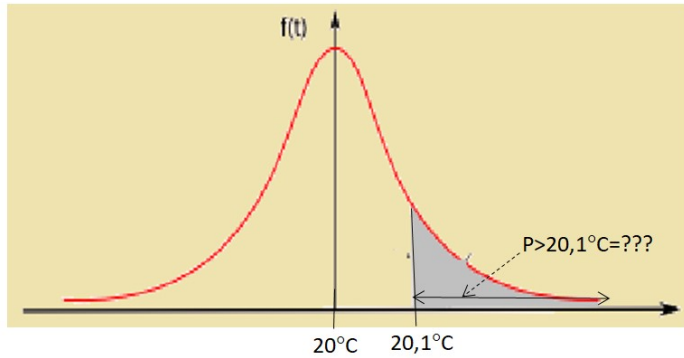
$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s / \sqrt{n}}$$

df = número de parcelas - 1 = 4 - 1 = 3

Soma	Soma
15	8
20	9
0	7
-25	-14
10	10

df = número de graus de liberdade

# DISTRIBUIÇÃO t DE STUDENT



Exercício

$$\bar{x} = 20,0^{\circ}C$$

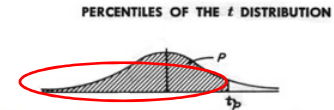
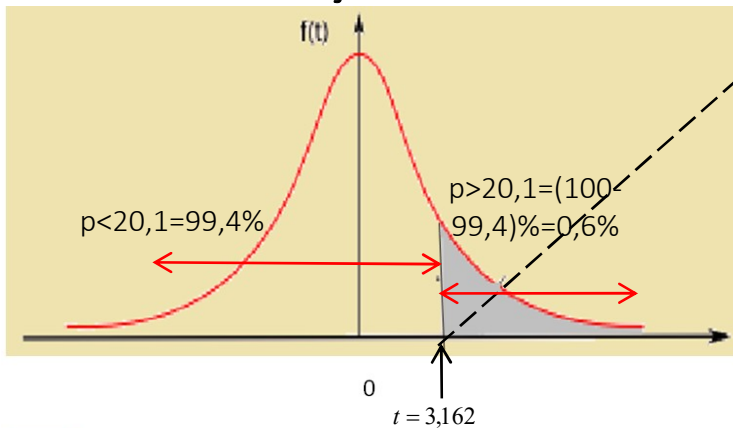
$$s = 0,1^{\circ}C$$

$$x_i = 20,1^{\circ}C$$

$$n = 10$$

$$t = \frac{x_i - \bar{x}}{s / \sqrt{n}} = \frac{20,1 - 20,0}{0,1 / \sqrt{10}} = 3,162$$

Distribuição t de Student



3,162??

df	t <sub>.60</sub>	t <sub>.70</sub>	t <sub>.80</sub>	t <sub>.90</sub>	t <sub>.95</sub>	t <sub>.975</sub>	t <sub>.99</sub>	t <sub>.995</sub>
1	.325	.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.289	.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.277	.584	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.271	.569	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.267	.559	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.265	.553	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.263	.549	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.262	.546	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.261	.545	.883	1.385	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.260	.542	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.260	.540	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.259	.539	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.259	.538	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.258	.537	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.258	.536	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.258	.535	.865	1.337	1.746	2.120	2.593	2.921
17	.257	.534	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.257	.534	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.257	.533	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.257	.533	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.257	.532	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.256	.532	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.256	.532	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.256	.531	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.256	.531	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.256	.531	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.256	.531	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.256	.530	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.256	.530	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.256	.530	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.255	.529	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.254	.527	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.254	.526	.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.253	.524	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

df = número de graus de liberdade

t	p
2,821	99
3,162	??
3,250	99,5

Δt	Δp
0,429	0,5
0,341	X

X	0,40
p	99,40
100-P	0,60

## DISTRIBUIÇÃO NORMALIZADA E $t$ DE STUDENT

---

Coordenada  $Z$

$$Z = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

Coordenada  $t$

$$t = \frac{x_i - \bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

## TESTES PARAMÉTRICOS

---

Tradicionalmente denominamos estes procedimentos de métodos paramétricos pelo fato deles serem baseados em uma família paramétrica particular de distribuições, nesse caso a normal. (Montgomery,DC)

Baseiam-se em amostragem de uma população com parâmetros específicos, tais como a média e o desvio-padrão.

**“NÃO EXISTE CRITÉRIO QUE SEJA SUPERIOR AO JULGAMENTO DE UM TÉCNICO EXPERIENTE, QUE ESTEJA FAMILIARIZADO COM SEU PROCESSO DE MEDIÇÃO. AS REGRAS ESTATÍSTICAS SÃO PRINCIPALMENTE PARA AUXÍLIO AOS TÉCNICOS INEXPERIENTES , QUE ESTEJAM TRABALHANDO COM UM NOVO PROCESSO DE MEDIÇÃO OU PARA AQUELES QUE SIMPLEMENTE DESEJAM JUSTIFICAR PORQUE ELES TOMARAM AQUELA DECISÃO”**

Natrella M.G “Experimental Statistics” ; National Bureau of Standards Handbook 91,1963

## TESTES DE REJEIÇÃO

### Teste de Chauvenet

$$H_0: x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

$H_1 \rightarrow$  pelo menos um valor difere dos demais.

Condição para Rejeição de qualquer valor de um conjunto:  $|x_i - \bar{x}_i| > k_{(n)} \cdot s$

n	$k_{(n)}$
2	1,15
3	1,35
4	1,54
5	1,65
6	1,73
7	1,80
8	1,86
9	1,92
10	1,96

# TESTES DE REJEIÇÃO

## Teste de Chauvenet

Exercício

$$\bar{x} = 2,561\text{mm}$$

$$s = 0,014\text{mm}$$

$x_n$  Será rejeitado

x (mm)
2,547
2,549
2,553
2,555
2,557
2,559
2,561
2,565
2,567
2,597

$n = 10$

n	$k_{(n)}$
2	1,15
3	1,35
4	1,54
5	1,65
6	1,73
7	1,80
8	1,86
9	1,92
10	1,96

$$|2,597 - 2,561|\text{mm} = 0,036\text{mm} > 1,96 \cdot 0,014\text{mm} = 0,028\text{mm}$$

$$x_n = 2,547\text{mm}$$

$$|2,547 - 2,561|\text{mm} = 0,014\text{mm} < 1,96 \cdot 0,014\text{mm} = 0,028\text{mm}$$

$$H_0 : x_1 = x_2 = \dots = x_n$$


Ao nível de confiança de 95%  $H_0$  é rejeitada por conta de  $x_n$ .

# TESTES DE REJEIÇÃO


## Teste de Dixon

$$H_0: x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

$H_1$  : pelo menos um valor difere dos demais.

$n$  

Quantidade de repetições	$r_{ij}$
$3 \leq n \leq 7$	$r_{10}$
$8 \leq n \leq 10$	$r_{11}$
$11 \leq n \leq 13$	$r_{21}$
$14 \leq n \leq 25$	$r_{22}$

  $r_{ij}$  (calculado)

$r_{ij}$	$x_n$ suspeito	$x_1$ suspeito
$r_{10}$	$(x_n - x_{n-1}) / (x_n - x_1)$	$(x_2 - x_1) / (x_n - x_1)$
$r_{11}$	$(x_n - x_{n-1}) / (x_n - x_2)$	$(x_2 - x_1) / (x_{n-1} - x_1)$
$r_{21}$	$(x_n - x_{n-2}) / (x_n - x_2)$	$(x_3 - x_1) / (x_{n-1} - x_1)$
$r_{22}$	$(x_n - x_{n-2}) / (x_n - x_3)$	$(x_3 - x_1) / (x_{n-2} - x_1)$

CRITERIA FOR REJECTION OF OUTLYING OBSERVATIONS

Statistic	Number of Observations, $n$	Upper Percentiles						
		.70	.80	.90	.95	.98	.99	.995
$r_{10}$	3	.684	.781	.886	.941	.976	.988	.994
	4	.471	.560	.679	.765	.846	.889	.926
	5	.373	.451	.557	.642	.729	.780	.821
	6	.318	.386	.482	.560	.644	.698	.740
	7	.281	.344	.434	.507	.586	.637	.680
$r_{11}$	8	.318	.385	.479	.554	.631	.683	.725
	9	.288	.352	.441	.512	.587	.635	.677
	10	.265	.325	.409	.477	.551	.597	.639
$r_{21}$	11	.391	.442	.517	.576	.638	.679	.713
	12	.370	.419	.490	.546	.605	.642	.675
	13	.351	.399	.467	.521	.578	.615	.649
$r_{22}$	14	.370	.421	.492	.546	.602	.641	.674
	15	.353	.402	.472	.525	.579	.616	.647
	16	.338	.386	.454	.507	.559	.595	.624
	17	.325	.373	.438	.490	.542	.577	.605
	18	.314	.361	.424	.475	.527	.561	.589
	19	.304	.350	.412	.462	.514	.547	.575
	20	.295	.340	.401	.450	.502	.535	.562
	21	.287	.331	.391	.440	.491	.524	.551
	22	.280	.323	.382	.430	.481	.514	.541
	23	.274	.316	.374	.421	.472	.505	.532
	24	.268	.310	.367	.413	.464	.497	.524
	25	.262	.304	.360	.406	.457	.489	.516

Condição de rejeição de  $H_0$

$$r_{ij} \text{ (calculado)} > r_{ij} \text{ (tabelado)}$$

# TESTES DE REJEIÇÃO

## Teste de Dixon

### Exercício

$$H_0 : x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

$H_1$  : pelo menos um valor difere dos demais.

x (mm)
2,547
2,549
2,553
2,555
2,557
2,559
2,561
2,565
2,567
2,597

$n = 10$  →

Quantidade de repetições	$r_{ij}$
$3 \leq n \leq 7$	$r_{10}$
<b><math>8 \leq n \leq 10</math></b>	<b><math>r_{11}</math></b>
$11 \leq n \leq 13$	$r_{21}$
$14 \leq n \leq 25$	$r_{22}$

$r_{ij} \text{ (calculado)} = r_{11}$

$r_{ij}$	$x_n$ suspeito	$x_1$ suspeito
$r_{10}$	$(x_n - x_{n-1}) / (x_n - x_1)$	$(x_2 - x_1) / (x_n - x_1)$
<b><math>r_{11}</math></b>	<b><math>(x_n - x_{n-1}) / (x_n - x_2)</math></b>	<b><math>(x_2 - x_1) / (x_{n-1} - x_1)</math></b>
$r_{21}$	$(x_n - x_{n-2}) / (x_n - x_2)$	$(x_3 - x_1) / (x_{n-1} - x_1)$
$r_{22}$	$(x_n - x_{n-2}) / (x_n - x_3)$	$(x_3 - x_1) / (x_{n-2} - x_1)$

CRITERIA FOR REJECTION OF OUTLYING OBSERVATIONS

Statistic	Number of Observations, $n$	Upper Percentiles							
		.70	.80	.90	.95	.98	.99	.995	
$r_{10}$	3	.684	.781	.886	.941	.976	.988	.994	
	4	.471	.560	.679	.765	.846	.889	.926	
	5	.373	.451	.557	.642	.729	.780	.821	
	6	.318	.386	.482	.560	.644	.698	.740	
	7	.281	.344	.434	.507	.586	.637	.680	
$r_{11}$	8	.318	.385	.479	.564	.631	.683	.725	
	9	.288	.352	.441	.512	.587	.635	.677	
	10	.265	.325	.406	<b>.477</b>	.551	.597	.639	
$r_{21}$	11	.391	.442	.517	.576	.638	.679	.713	
	12	.370	.419	.490	.546	.605	.642	.675	
	13	.351	.399	.467	.521	.578	.615	.649	
$r_{22}$	14	.370	.421	.492	.546	.602	.641	.674	
	15	.353	.402	.472	.525	.579	.616	.647	
	16	.338	.386	.454	.507	.559	.595	.624	
	17	.325	.373	.438	.490	.542	.577	.605	
	18	.314	.361	.424	.475	.527	.561	.589	
	19	.304	.350	.412	.462	.514	.547	.575	
	20	.295	.340	.401	.450	.502	.535	.562	
	21	.287	.331	.391	.440	.491	.524	.551	
	22	.280	.323	.382	.430	.481	.514	.541	
	23	.274	.316	.374	.421	.472	.505	.532	
	24	.268	.310	.367	.413	.464	.497	.524	
	25	.262	.304	.360	.406	.457	.489	.516	

$r_{ij} \text{ (tabelado)} = 0,477$

## TESTES DE REJEIÇÃO

### Teste de Dixon

#### Exercício

$x_n$  Rejeição

x (mm)
2,547
2,549
2,553
2,555
2,557
2,559
2,561
2,565
2,567
2,597

$n = 10$

$r_{ij}$  (calculado) =  $r_{11}$

$$x_n \rightarrow r_{11} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2} = \frac{2,597 - 2,567}{2,597 - 2,549} = 0,625$$

$$x_1 = 2,547 \text{ mm}$$

$$x_1 \rightarrow r_{11} = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1} = \frac{2,549 - 2,547}{2,567 - 2,547} = 0,100$$

$$r_{ij} \text{ (tabelado)} = 0,477$$

$$r_{ij} \text{ (calculado)} = 0,625 > r_{ij} \text{ (tabelado)} = 0,477$$

$$r_{ij} \text{ (calculado)} = 0,100 < r_{ij} \text{ (tabelado)} = 0,477$$

$H_0: x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Ao nível de confiança de 95%  $H_0$  é rejeitada por conta de  $x_n$ .

## TESTES DE REJEIÇÃO

### Teste de Grubbs'

$$H_0: x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

$H_1$  : pelo menos um valor difere dos demais.

Para um valor  $x_i$  ou  $x_n$   $\longrightarrow$   $G_{\text{calculado}} = \frac{|x_i - \bar{x}|}{s}$

$x_i$  = Valor suspeito       $\bar{x}$  = Média Amostral       $s$  = Desvio padrão

$G_{\text{tabelado}}$	Um Valor		Dois Valores	
	1-p			
n	0,05	0,01	0,05	0,01
3	1,155	1,155	-	-
4	1,481	1,496	0,0002	0
5	1,715	1,764	0,009	0,0018
6	1,887	1,973	0,0349	0,0116
7	2,02	2,139	0,0708	0,0308
8	2,126	2,274	0,1101	0,0563
9	2,215	2,387	0,1492	0,0851
10	2,29	2,82	0,1864	0,115

Condição de Rejeição de  $H_0$

$$G_{\text{calculado}} > G_{\text{tabelado}}$$

## TESTES DE REJEIÇÃO

### Teste de Grubbs'

Exercício

$H_0: x_1 = x_2 = \dots = x_n$        $H_1 \rightarrow$  pelo menos um valor difere dos demais.

x (mm)
2,547
2,549
2,553
2,555
2,557
2,559
2,561
2,565
2,567
2,597

$G_{\text{tabelado}}$	Um Valor		Dois Valores	
	1-p			
n	0,05	0,01	0,05	0,01
3	1,155	1,155	-	-
4	1,481	1,496	0,0002	0
5	1,715	1,764	0,009	0,0018
6	1,887	1,973	0,0349	0,0116
7	2,02	2,139	0,0708	0,0308
8	2,126	2,274	0,1101	0,0563
9	2,215	2,387	0,1492	0,0851
10	2,29	2,82	0,1864	0,115

Será rejeitado  $x_n = 2,597$

$$x_n \rightarrow G_{\text{calculado}} = \frac{|x_n - \bar{x}|}{s} = \frac{2,597 - 2,561}{0,014} = 2,571$$

$$G_{\text{(calculado)}} = 2,571 > G_{\text{(tabelado)}} = 2,29$$

$$x_1 = 2,547$$

$$x_1 \rightarrow G_{\text{calculado}} = \frac{|x_1 - \bar{x}|}{s} = \frac{2,547 - 2,561}{0,014} = 1,000$$

$$\bar{x} = 2,561 \text{ mm}$$

$$s = 0,014 \text{ mm}$$

Ao nível de confiança de 95%  $H_0$  é rejeitada por conta de  $x_n$ .

## TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE VARIÂNCIAS

---

Dos testes referentes a homogeneidade de variâncias podem ser citados:

- Teste F;
- Teste de Cochran ( mais de dois desvios-padrão e com o mesmo número de repetições);
- Teste de Bartlett ( mais de dois desvios-padrão e sem a necessidade dos dados possuírem o mesmo número de repetições);
- Teste de Levene.

Como em metrologia se utiliza pequenas amostras, dos testes citados abordaremos somente neste trabalho o Teste F e o Teste de Cochran.

# TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE VARIÂNCIAS

## Teste F

Hipótese nula (variâncias idênticas)  $\rightarrow H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$F_{\text{calculado}} = \frac{S_i^2}{S_j^2} \quad s_i \geq s_j$$

Condição para a Homogeneidade:  $F_{\text{calculado}} \leq F_{\text{crítico}}$

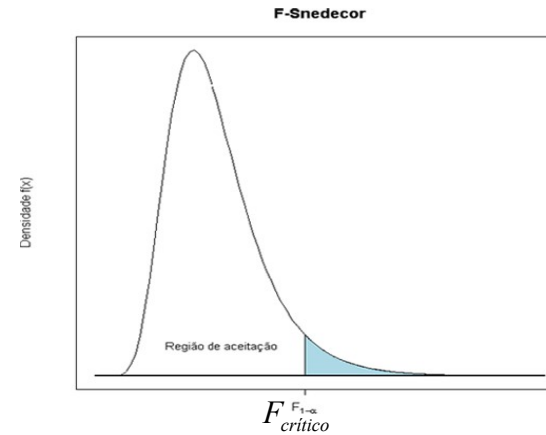
$F_C$  em função dos graus de liberdade dos conjuntos para um determinado nível de confiança

PERCENTILES OF THE F DISTRIBUTION  
 $F_{.95}(n_1, n_2)$

$n_1 =$  Graus de liberdade do numerador

$n_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00	236,80	238,90	240,50	241,90	243,90	245,90	248,00	249,10	250,10	251,10	252,20	253,30	254,30
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,63	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,91	2,87	2,83	2,80	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,27	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,19	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
17	4,44	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,40	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,53	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,43	2,37	2,30	2,23	2,15	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,51	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,40	2,34	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,49	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,31	2,25	2,17	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,87	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,99	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,58	2,47	2,38	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,72	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
$\infty$	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Ref: Natrella



# TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE VARIÂNCIAS

## Teste F

### Exercício

Hipótese nula  $\rightarrow H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  (variâncias idênticas)

Operador	
1	2
mm	
4,993	4,953
4,984	4,969
4,985	4,985
4,990	4,978
4,985	4,971
4,983	4,983

$\nu_1$	1	2	3	4	5	6
$\nu_2$						
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37

$$n_i = n_j = 6$$

$$\nu_i = \nu_j = 5$$

$$F_C(95\%) = 5,05$$

$$F_C = \text{INV.F}(0,95;5;5) = 5,05$$

$$s_i = 0,0039 \text{ mm}$$

$$s_j = 0,011 \text{ mm}$$

$$F_{\text{calculado}} = \frac{0,011^2}{0,0039^2} = 8,91$$

$$F_{\text{calculado}}(8,91) \geq F_C(5,05)$$

A hipótese  $H_0$  não é aceita ao nível de 95%, então não existe homogeneidade entre as dispersões do dois conjuntos de medição.

# TESTES DE HOMOGENEIDADE DE VARIÂNCIAS

## Teste Cochran

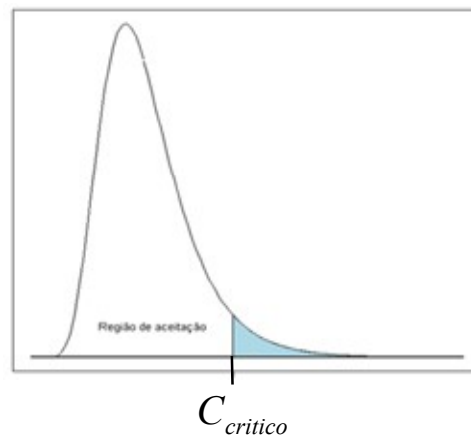
Teste referente a mais de dois desvios padrão com o mesmo número de repetições:

Hipótese nula (variâncias idênticas)  $\rightarrow H_0 : \sigma_{\max}^2 = \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2$

Critical values for Cochran's C at the 5% level of significance

k	$n_j = 2$	$n_j = 3$	$n_j = 4$	$n_j = 5$	$n_j = 6$
2	—	0.975	0.900	0.906	0.877
3	0.967	0.871	0.798	0.746	0.707
4	0.906	0.768	0.684	0.625	0.590
5	0.841	0.684	0.598	0.544	0.506
6	0.781	0.616	0.532	0.480	0.445
7	0.727	0.561	0.480	0.431	0.397
8	0.680	0.516	0.438	0.391	0.360
9	0.638	0.478	0.403	0.358	0.329
10	0.602	0.445	0.373	0.331	0.303
11	0.570	0.417	0.348	0.308	0.281
12	0.541	0.392	0.326	0.288	0.262
13	0.515	0.371	0.307	0.271	0.243
14	0.492	0.352	0.291	0.255	0.223
15	0.471	0.335	0.276	0.242	0.220
16	0.452	0.319	0.250	0.230	0.208
17	0.434	0.305	0.250	0.219	0.198
18	0.418	0.293	0.240	0.209	0.189
19	0.403	0.281	0.230	0.200	0.181
20	0.389	0.270	0.220	0.192	0.174
21	0.377	0.261	0.212	0.185	0.167
22	0.365	0.252	0.204	0.178	0.160
23	0.354	0.243	0.197	0.172	0.155
24	0.343	0.235	0.191	0.166	0.149
25	0.334	0.228	0.185	0.160	0.144
26	0.325	0.221	0.179	0.155	0.140
27	0.316	0.215	0.173	0.150	0.135
28	0.308	0.209	0.168	0.146	0.131
29	0.300	0.203	0.164	0.142	0.127
30	0.293	0.198	0.159	0.138	0.124

*C crítico*

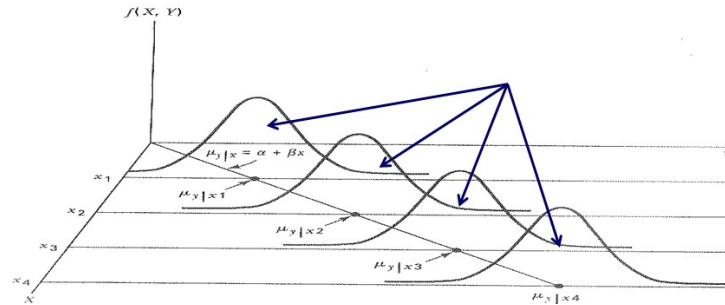


$$C_{\text{calculado}} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^k S_i^2}$$

Condição de aceitação de  $H_0$ :  $C_{\text{calculado}} \leq C_{\text{crítico}, n, k}$

# TESTES DE HOMOGENEIDADE DE VARIÂNCIAS

## Homoscedasticidade



Quando as dispersões ao longo da curva são uniformes diz-se que ela apresenta Homoscedasticidade.

•As dispersões ao longo de uma curva de calibração é apresentada na tabela ao lado. Sabendo-se que cada variância é estimada a partir de 06 repetições, a curva de calibração Homoscedasticidade?

K	$S_i^2$
1	0,011
2	0,008
3	0,027
4	0,052
5	0,012
6	0,024
7	0,002

Hipótese nula (variâncias idênticas)  $\rightarrow H_0 : \sigma_{\max}^2 = \sigma_i^2 = \dots = \sigma_k^2$

# TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE VARIÂNCIAS

## Teste Cochran

### Exercício

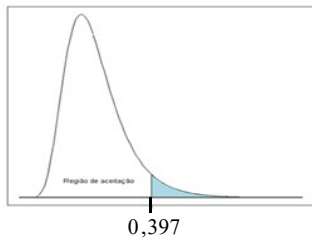
k	$S_i^2$	Valores Críticos de Cochran para um nível de confiança de 95%					
k		$n_j=2$	$n_j=3$	$n_j=4$	$n_j=5$	$n_j=6$	
1	0,011						
2	0,008	-	0,975	0,939	0,906	0,877	
3	0,027	0,967	0,871	0,798	0,746	0,707	
4	0,052	0,906	0,768	0,684	0,629	0,59	
5	0,012	0,841	0,684	0,598	0,544	0,506	
6	0,024	0,781	0,616	0,532	0,48	0,445	
7	0,002	0,727	0,561	0,48	0,431	0,397	
8		0,68	0,516	0,438	0,391	0,36	
9		0,638	0,478	0,403	0,358	0,329	
10		0,602	0,445	0,373	0,331	0,303	

$$C_{\text{crítico}} (k = 7; n = 6) = 0,397$$

$$s_{\text{max}}^2 = 0,052 \quad \sum_{i=1}^k s_i^2 = 0,135$$

$$C_{\text{calculado}} = \frac{0,052}{0,135} = 0,385$$

$$C_{\text{calculado}} \leq C_{\text{crítico}}$$



A hipótese  $H_0$  é aceita para um nível de 95%, então a curva apresenta homoscedasticidade para um nível de confiança de 95%.

Para variâncias homogêneas o desvio padrão ponderado ( $s_p$ ) é calculado pela expressão:

$$s_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N v_i S_i^2}{\sum_{i=1}^N v_i}}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{5 \cdot (0,011 + 0,008 + 0,027 + 0,052 + 0,012 + 0,024 + 0,002)}{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5}} = 0,139$$

# TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE VARIÂNCIAS

## Teste F

### Exercício

Hipótese nula  $\rightarrow H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  (variâncias idênticas)

k	$S_i^2$
1	0,011
2	0,008
3	0,027
4	0,052
5	0,012
6	0,024
7	0,002

$v_1$	1	2	3	4	5	6
$v_2$						
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37

$$n_i = n_j = 6$$

$$v_i = v_j = 5$$

$$F_C(95\%) = 5,05$$

$$F_C = \text{INV.F}(0,95;5;5) = 5,05$$

$$s_{\max} = 0,052$$

$$s_{\min} = 0,002$$

$$F_{\text{calculado}} = \frac{0,052}{0,002} = 26$$

$$F_{\text{calculado}}(26) \geq F_C(5,05)$$

A hipótese  $H_0$  não é aceita ao nível de 95%, então não existe homogeneidade entre as dispersões dos dois conjuntos de medição.

# TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE VARIÂNCIAS

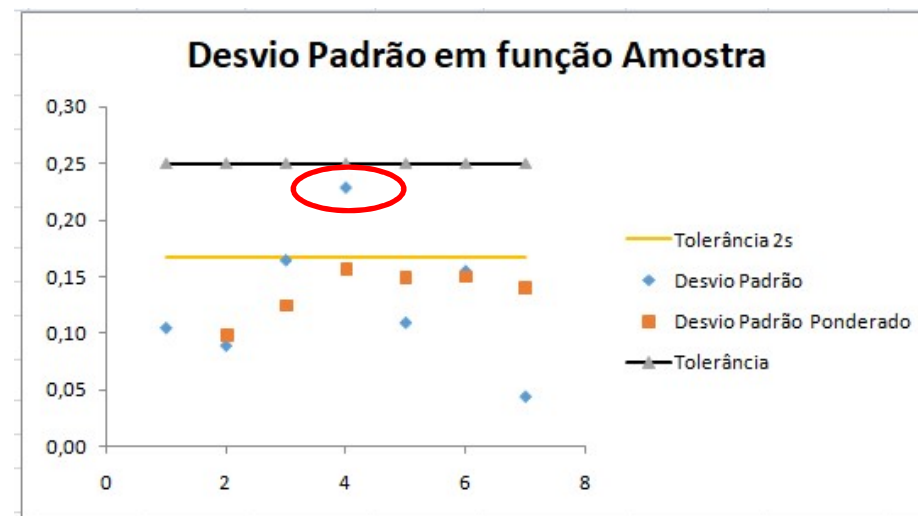
## Teste F

Tolerância do processo: 0,25 (3s)

$$F_{\text{tabelado}} = \text{Invf}(0,05; v_{\text{numerador}}; v_{\text{denominador}})$$

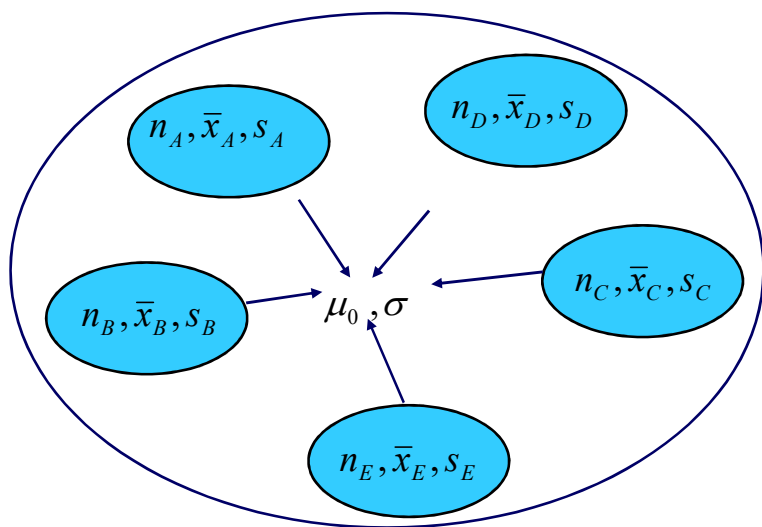
k		Si <sup>2</sup>	n	v	Fcal	F tabelado	Fcal-Ftab
1		0,011	6	5	1,375	5,050	-3,675
2		0,008	6	5			
			n	v	Fcal	Ftab	Fcal-Ftab
	S <sup>2</sup> <sub>p1,2</sub>	0,0095		10	2,842105	3,326	-0,484
3	S <sup>2</sup> <sub>3</sub>	0,027	6	5			
			n	v	Fcal	Ftab	Fcal-Ftab
	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3</sub>	0,015		15	3,391304	2,901	0,490
4	S <sup>2</sup> <sub>4</sub>	0,052	6	5			
			n	v	Fcal	Ftab	Fcal-Ftab
	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3,4</sub>	0,0245		20	2,041667	4,558	-2,516
5	S <sup>2</sup> <sub>5</sub>	0,012	6	5			
			n	v	Fcal	Ftab	Fcal-Ftab
	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3,4,5</sub>	0,022		25	1,090909	2,603	-1,512
6	S <sup>2</sup> <sub>6</sub>	0,024	6	5			
			n	n	Fcal	Ftab	Fcal-Ftab
	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3,4,5,6</sub>	0,02233		30	11,16667	4,496	6,67
7	S <sup>2</sup> <sub>7</sub>	0,002	6	5			
			n	n	Fcal	Ftab	Fcal-Ftab
	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3,4,5,6,7</sub>	0,01943					

k	Si <sup>2</sup>	Sp <sup>2</sup>		Si	Sp	Tolerância	
						2s	3s
1	0,011			0,10		0,17	0,25
2	0,008	S <sup>2</sup> <sub>p1,2</sub>	0,010	0,09	0,097	0,17	0,25
3	0,027	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3</sub>	0,015	0,16	0,124	0,17	0,25
4	0,052	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3,4</sub>	0,025	0,23	0,157	0,17	0,25
5	0,012	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3,4,5</sub>	0,022	0,11	0,148	0,17	0,25
6	0,024	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3,4,5,6</sub>	0,022	0,15	0,149	0,17	0,25
7	0,002	S <sup>2</sup> <sub>p1,2,3,4,5,6,7</sub>	0,019429	0,04	<b>0,139</b>	0,17	0,25



## INTERVALO DE CONFIANÇA

- O valor verdadeiro da média populacional ( $\mu_0$ ) não pode ser determinado.
- Intervalo de confiança:** intervalo numérico ao redor da média de um conjunto de réplicas de resultados no qual se espera que a média da população ( $\mu_0$ ) possa estar contida, com uma certa probabilidade.



$$IC = \bar{x}_i \pm t_{\text{crítico}}(v, p) \cdot \frac{s_i}{\sqrt{n_i}}$$

Distribuição t de Student



Graus de liberdade v	Fração_p em porcentagem		
	95	95,45	99
1	12,71	14,57	63,66
2	4,3	4,77	9,92
3	3,18	3,31	5,84
4	2,78	2,87	4,60
5	2,57	2,65	4,03
6	2,45	2,52	3,71
7	2,36	2,43	3,50
8	2,31	2,37	3,36
9	2,26	2,32	3,25
10	2,23	2,28	3,17
11	2,20	2,25	3,11
12	2,18	2,23	3,05
13	2,16	2,21	3,01
14	2,14	2,20	2,98
15	2,13	2,19	2,95
16	2,12	2,17	2,92
17	2,11	2,16	2,90
18	2,10	2,15	2,88
19	2,09	2,14	2,86
20	2,09	2,13	2,85
25	2,06	2,11	2,79
30	2,04	2,09	2,75
35	2,03	2,07	2,72
40	2,02	2,06	2,70
45	2,01	2,06	2,69
50	2,01	2,05	2,68
100	1,96	2,025	2,626
∞	1,960	2,000	2,576

$t_{\text{crítico}}$

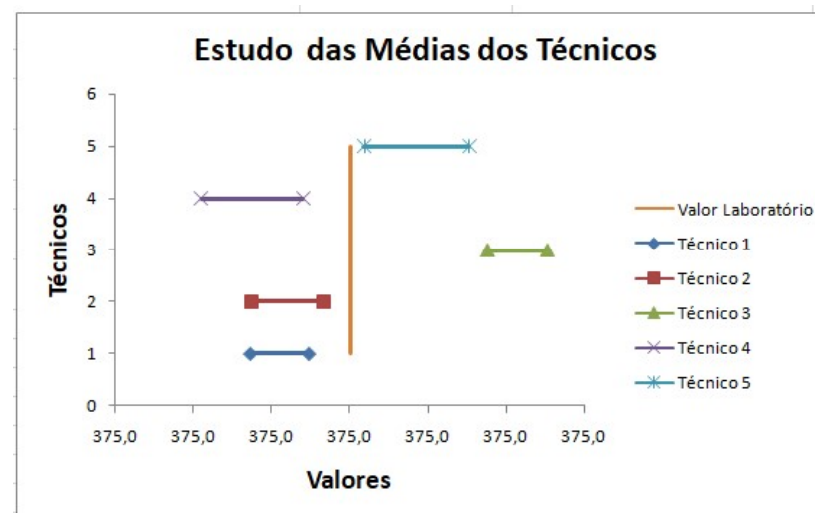
## INTERVALO DE CONFIANÇA

A partir dos conjuntos de repetições de medição de uma haste padrão realizados por cinco técnicos de um laboratório que são apresentados na tabela, verificar se existe compatibilidade do conjunto de medições de cada técnico com o resultado de medição do laboratório, para uma probabilidade de 95%.

1	2	3	4	5
374,9993	374,9994	375,0025	374,9973	375,0015
374,9984	375,0002	375,0030	374,9996	375,0031
374,9985	374,9987	375,0025	374,9995	375,0005
374,9983	374,9992	375,0025	374,9978	375,0010
374,9992	374,9995	375,0015	374,9983	375,0010
374,9990	375,0002	375,0020	374,9991	375,0005
374,9995	374,9988	375,0015	374,9996	375,0005
374,9998	374,9992	375,0020	374,9995	375,0005
374,9995	374,9982	375,0015	374,9976	375,0005
374,9995	374,9987	375,0025	374,9992	374,9995
374,9993	374,9994	375,0025	374,9973	375,0015
374,9984	375,0002	375,0030	374,9996	375,0031
374,9985	374,9987	375,0025	374,9995	375,0005
374,9983	374,9992	375,0025	374,9978	375,0010
374,9992	374,9995	375,0015	374,9983	375,0010
374,9990	375,0002	375,0020	374,9991	375,0005

Media	374,99898	374,99933	375,00222	374,99869	375,00101
desvio padrão	0,00051	0,00063	0,00052	0,00089	0,00094
s <sup>2</sup>	2,56E-07	3,93E-07	2,66E-07	7,99E-07	8,88E-07
t	2,13145	2,13145	2,13145	2,13145	2,13145
ts/raiz(n)	0,00027	0,00033	0,00027	0,00048	0,00050
Li	374,99871	374,99900	375,00194	374,99822	375,00051
Ls	374,99925	374,99967	375,00249	374,99917	375,00151

F <sub>calc</sub>	3,46
v <sub>1</sub>	15
v <sub>2</sub>	15
F <sub>tab</sub>	2,40
Valor Laboratório	375,00005

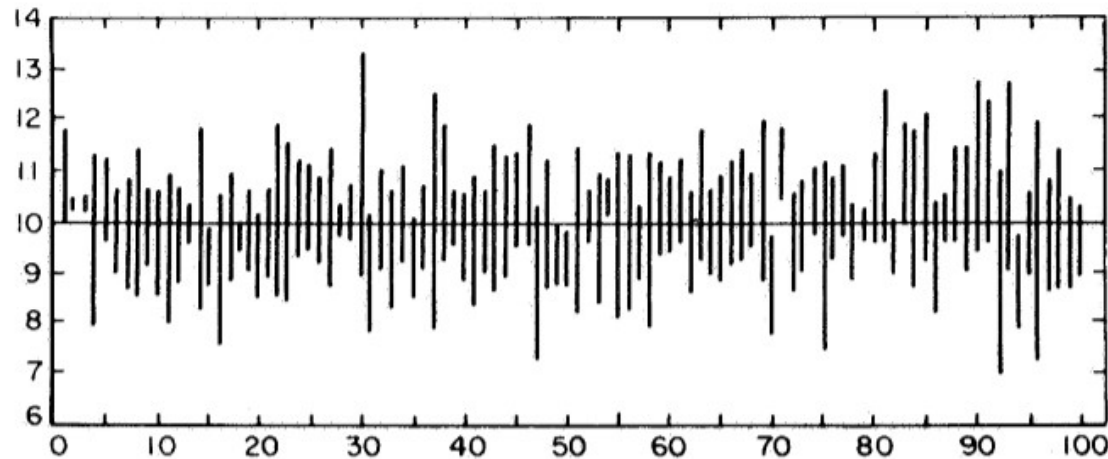


As medidas dos técnicos não são compatíveis com o valor do laboratório.

## INTERVALO DE CONFIANÇA

### Intervalo de confiança de 90%

Intervalos de confiança de 90% para 100 amostras de tamanho 4 de uma população normal com  $\mu = 10$  e desvio padrão  $s = 1$ . 90 intervalos conterão a média e 10 não.



### Algumas aplicações do intervalo de confiança

Comparação de uma média amostral com um valor de referência

Comparação entre duas médias independentes

Comparação entre duas médias dependentes

# ETAPAS DE UM TESTE DE HIPÓTESE PARA A COMPARAÇÃO DE DUAS MÉDIAS

1. Declaração das hipóteses nula e alternativa. ( $H_0$  e  $H_1$ )

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

2. Determinação que  $\alpha$  (Erro tipo I) = 5% . Probabilidade de rejeitar  $H_0$  e ela é verdadeira.

3. Definimos um intervalo de confiança em torno de  $\bar{x}$  no nível  $100-\alpha = 95\%$ . Ou também o cálculos de  $z$  ou  $t$

$$\bar{x} \pm 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (n > 25 \text{ ou } \sigma \text{ conhecido}) \qquad \bar{x} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (n < 25 \text{ ou } \sigma \text{ desconhecido})$$

4. Investigar se o  $\mu_0$  se enquadra no intervalo de confiança. Ou também se os valores  $t_{\text{cal}}$  ( $n < 25$ ) ou  $z_{\text{cal}}$  ( $n > 25$ ) são menores do que  $t_{\text{tab}}$  ou  $z_{\text{tab}}$  em cada caso específico.

5. Se a resposta para a nossa pergunta for "sim", aceitamos  $H_0$ , se for "não", rejeitamos o  $H_0$  (e aceitamos a  $H_1$ ).

6. Apresentação dos resultados

Existe uma certa preferência pelo intervalo de confiança, porque ele não apenas decide se aceita  $H_0$  ou  $H_1$ , mas também fornece um resumo compacto e informativo do resultado da medição e também por ser mais indicado a dados. Por outro lado, o cálculo de  $z$  ou  $t$  permite fornecer valores  $p$ .

# TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE MÉDIAS

## Comparação entre a média amostral e um valor de referência conhecido

$$H_0: \bar{x} = \mu_0 \quad H_1: \bar{x} \neq \mu_0 \quad H_0 \text{ é aceito quando } |t_{cal}| < t_{crit} \text{ onde } t_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \text{ ou quando } \bar{x} - t_{crit} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{x} + t_{crit} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Suponha que uma preparação sintética contendo 100 mg de uma substância foi preparada e os resultados são apresentados na tabela. Há diferença significativa (há tendência) da média das repetições realizadas?

Medida	M (mg)
1	98,90
2	100,30
3	99,70
4	99,00
5	100,60
6	98,60
Média	99,517
s	0,813

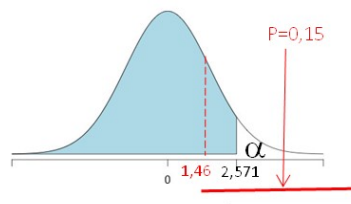
$$t_{cal} = \frac{99,517 - 100}{\frac{0,813}{\sqrt{6}}} = -1,46$$

$$1,46 < 2,571$$

$$99,517 - 2,571 \frac{0,813}{\sqrt{6}} \leq 100 \leq 99,517 + 2,571 \frac{0,813}{\sqrt{6}}$$


$$98,66 < 100 < 100,37$$

5	P(t)	t
	0,8	0,92
	0,897	1,46
	0,9	1,476
p=1-P(t)		0,103



Quando  $p > \alpha$ , não há efeito significativo (notação abreviada NS).

TABLE A-4. PERCENTILES OF THE t DISTRIBUTION

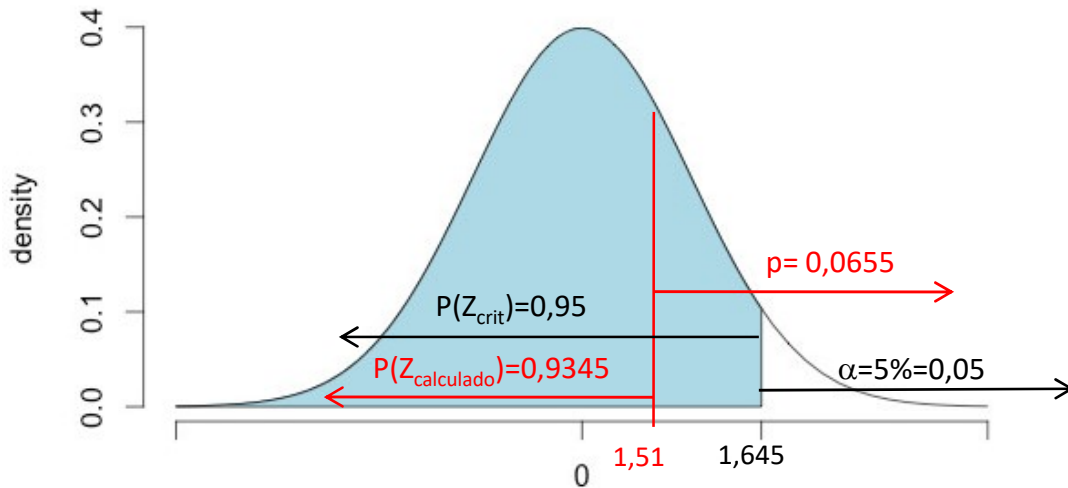


df	t <sub>.60</sub>	t <sub>.70</sub>	t <sub>.80</sub>	t <sub>.90</sub>	t <sub>.95</sub>	t <sub>.975</sub>	t <sub>.99</sub>	t <sub>.995</sub>
1	.325	.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.289	.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.277	.584	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.271	.569	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.267	.559	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.265	.553	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.263	.549	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.262	.546	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.261	.543	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.260	.542	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.260	.540	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.259	.539	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.259	.538	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.258	.537	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.258	.536	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.258	.535	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.257	.534	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.257	.534	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.257	.533	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.257	.533	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.257	.532	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.256	.532	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.256	.532	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.256	.531	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.256	.531	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.256	.531	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.256	.531	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.256	.530	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.256	.530	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.256	.530	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.255	.529	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.254	.527	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.254	.526	.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.253	.524	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Como  $1,46 < 2,57$ , o resultado do teste de hipótese  $H_0: \bar{x} = \mu_0$  é aceita: nenhuma diferença significativa entre  $\mu$ , estimada em 99,5 e 100, pode ser mostrada. A hipótese  $H_0$  é aceita porque 100 está entre os limites inferior (98,66) e superior (100,37) do intervalo de confiança da média amostral.  $p(0,10) > \alpha(0,05)$ .

# PROBABILIDADE p UNILATERAL

## Distribuição normal padronizada



$$P(Z_{\text{critico}}) = 1 - 0,05 = 0,9500 \quad \rightarrow \quad Z_{\text{critico}} = 1,645$$

TABLE A-1. CUMULATIVE NORMAL DISTRIBUTION—VALUES OF P

Values of P corresponding to  $z_p$  for the normal curve.

$z$  is the standard normal variable. The value of P for  $-z_p$  equals one minus the value of P for  $+z_p$ . e.g., the P for  $-1.62$  equals  $1 - .9474 = .0526$ .

$z_p$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5278	.5318	.5358
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7938	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9266	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9705
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9789	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

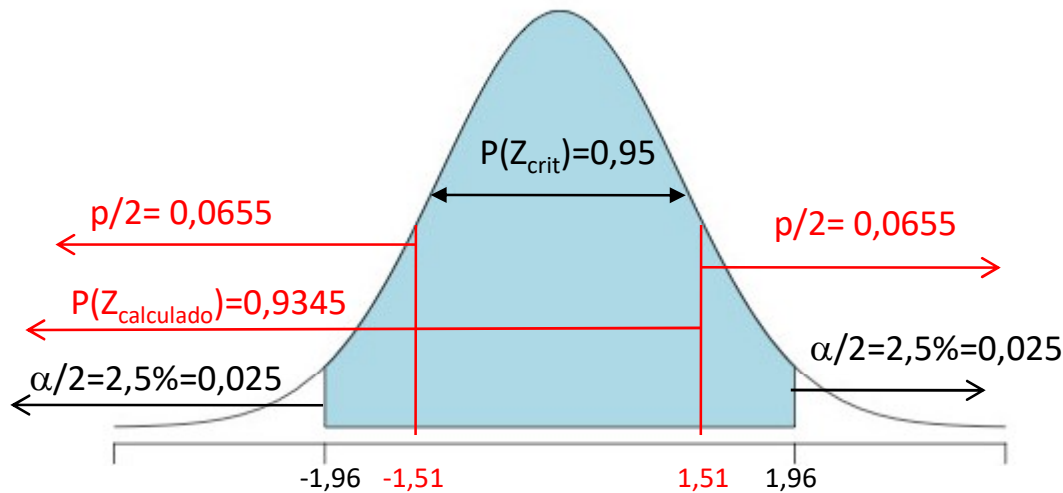
$$Z_{\text{calculado}} = 1,51 \quad \rightarrow \quad P(Z_{\text{calc}}) = 0,9345$$

$$p = 1 - 0,9345 = 0,0655$$

Quando  $p (0,0655) > \alpha (0,05)$ , não há efeito significativo (notação abreviada NS).

# PROBABILIDADE $p$ BILATERAL

## Distribuição normal padronizada



$$P(Z_{\text{critico}}) = 1 - 0,025 = 0,975 \quad \rightarrow \quad Z_{\text{critico}} = 1,96$$

TABLE A-1. CUMULATIVE NORMAL DISTRIBUTION—VALUES OF P

Values of P corresponding to  $z_p$  for the normal curve.  
 The value of P for  $-z_p$  equals one minus the value of P for  $+z_p$ .  
 e.g., the P for  $-1.62$  equals  $1 - .9474 = .0526$ .

$z_p$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5278	.5318	.5358
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9789	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

$$Z_{\text{calculado}} = 1,51 \quad \rightarrow \quad P(Z_{\text{calc}}) = 0,9345$$

$z_p$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

$$p/2 = 1 - 0,9345 = 0,0655 \quad \rightarrow \quad p = 2 \times 0,0655 = 0,131$$

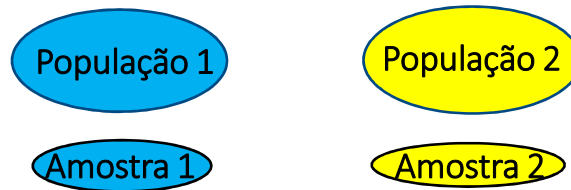
Quando  $p (0,13) > \alpha (0,05)$ , não há efeito significativo (notação abreviada NS).

# TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE MÉDIAS

---

## Amostras independentes

Nesse caso, queremos comparar as médias de duas populações e, para isso, uma amostra de cada população é coletada independentemente.



Por exemplo, para comparar o teor de nitrogênio em duas farinhas de trigo diferentes, são realizadas determinações replicadas em cada farinha.

# TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE MÉDIAS

## Comparação entre duas médias de amostras independentes

• Amostras pequenas ( $n_1$  e  $n_2 < 30$ ): teste  $t$

$$H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \quad \text{ou} \quad (\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0)$$

$$H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \quad \text{ou} \quad (\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \neq 0)$$

$H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$  é aceita quando  $|t_{calc}| < t_{crit}$

$$t_{calc} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{crit} \sqrt{S_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \leq 0 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{crit} \sqrt{S_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

ou quando

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - t_{crit} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} S_p \leq 0 \leq |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + t_{crit} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} S_p$$

onde 
$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

$t_{critico}$  no nível de significância escolhido, a e  $n_1 + n_2 - 2$  graus de liberdade.

A comparação de dois procedimentos de digestão para a determinação de nitrogênio em duas amostras de farinha de trigo apresentam os resultados da tabela. Existe alguma diferença entre os dois procedimentos? Ou entre amostras?

Procedimento	Média	Variância	n
1	2,05 g/100 g	0,050 g/100 g	8
2	2,21 g/100 g	0,040 g/100 g	7

$$F_{calculado} = \frac{0,050}{0,040} = 1,25 \quad F_{tabelado(0,05\%;7;6)} = 4,206$$

$$S_p^2 = \frac{(8-1)0,05 + (7-1)0,040}{(8+7-2)} = 0,045 \quad \rightarrow \quad S = 0,21$$

$$t_{tabelado(0,05\%;13)} = 2,16$$

$$(2,05 - 2,21) - 2,16 \sqrt{0,045 \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right)} \leq 0 \leq (2,05 - 2,21) + 2,16 \sqrt{0,045 \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right)}$$

$$-0,78 \leq 0 \leq 0,40$$

$$t_{calc} = \frac{2,21 - 2,05}{\sqrt{0,045 \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right)}} = 1,45$$

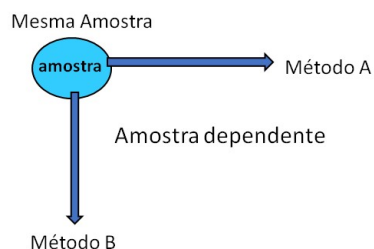
Como o intervalo contém "0"  $H_0$  foi aceito, nenhuma diferença significativa há entre os dois procedimentos de digestão pode ser detectada. Como também

$$t_{cal} < t_{crit}$$

# TESTES DE HOMOGENEIDADE ENTRE MÉDIAS

## Comparação entre duas médias de amostras dependentes

### Amostra dependente



• Quando as amostras são dependentes um pequeno número de replicatas encontra-se disponível, teste  $t$  pareado é aplicado.

$$H_0: \bar{d} = 0 \quad \text{quando} \quad \left| \bar{d}_j \right| - \frac{t_{crit} S_d}{\sqrt{K}} \leq 0 \leq \left| \bar{d}_j \right| + \frac{t_{crit} S_d}{\sqrt{K}}$$

$$\bar{d}_j = \sum_1^n \frac{d_i}{K} \quad s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_j^2}{2k}}$$

ou quando

$$\left| t_{cal} \right| < t_{crit;(n-1);p} \quad t_{cal} = \frac{\bar{d}_j}{\frac{s_d}{\sqrt{K}}}$$

• A quantidade de nitrogênio é determinada em 8 amostras da mesma farinha. Para a digestão de cada uma dessas amostras, são utilizados dois procedimentos diferentes cujos resultados são apresentados na tabela. Os métodos são homogêneos?:

Farinha	1	2	3	4	5	6	7	8
Metodo 1	2	1,4	2,3	1,2	2,1	1,5	2,4	2
Metodo 2	1,8	1,5	2,5	1	2	1,3	2,3	2,1
$d_j$	0,2	-0,1	-0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	-0,1
$d_j^2$	0,04	0,01	0,04	0,04	0,01	0,04	0,01	0,01

$$\bar{d} = \sum_1^N \frac{d_j}{K} = 0,05 \quad \sum_{i=1}^N d_j^2 = 0,2 \quad K = 8 \quad s_d = \sqrt{\frac{0,2}{2 \cdot 8}} = 0,112$$

$$t_{0,95;7} = 2,364$$

$$0,05 - \frac{2,364 \cdot 0,112}{\sqrt{8}} \leq 0 \leq 0,05 + \frac{2,364 \cdot 0,112}{\sqrt{8}}$$

$$-0,043 < 0 < 0,143$$

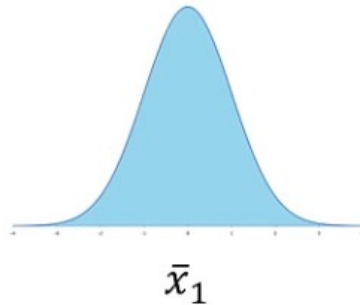
O intervalo de confiança das diferenças contém o valor **Zero**. Para o nível de 95% a hipótese nula é aceita. (não há diferença entre o método 1 e 2). Então para um nível de confiança de 95% existe compatibilidade entre as replicatas de medição do laboratório dos métodos 1 e 2.

$$t_{cal} = \frac{0,05}{\frac{0,112}{\sqrt{8}}} = 1,265$$

$$|1,265| < 2,364$$

# ANOVA (Análise de Variâncias)

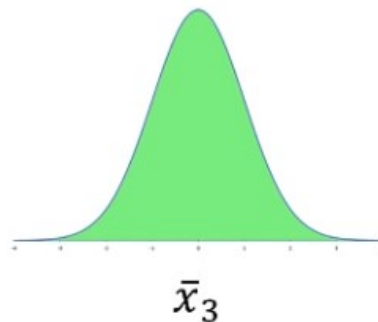
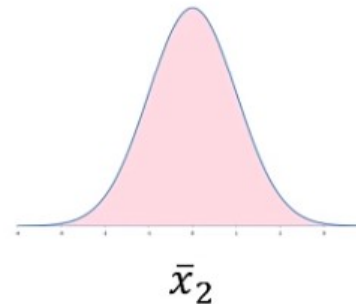
Suponha que queiramos comparar três médias de amostras para verificar se existe diferença entre elas.



Seria uma das médias tão distante das outras de modo que ela não pertença à mesma população?

A pergunta principal é:

Todas essas médias provêm de uma mesma população?



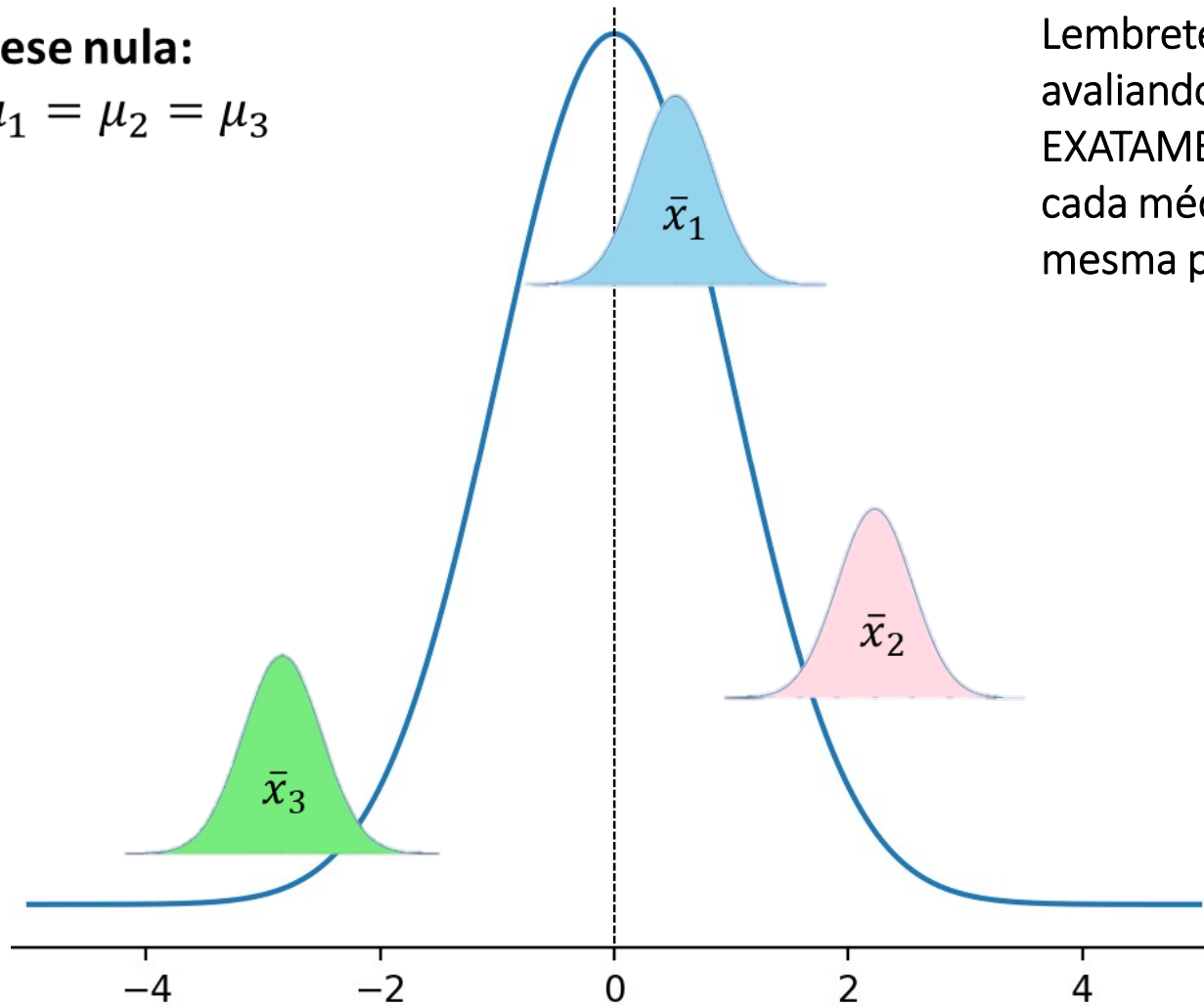
Ou todas estão distantes o suficiente de modo que provenham de populações diferentes.

# ANOVA (Análise de Variâncias)

**Hipótese nula:**

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

Lembrete: Não estamos avaliando se as médias são EXATAMENTE iguais, mas se cada média provém de uma mesma população.

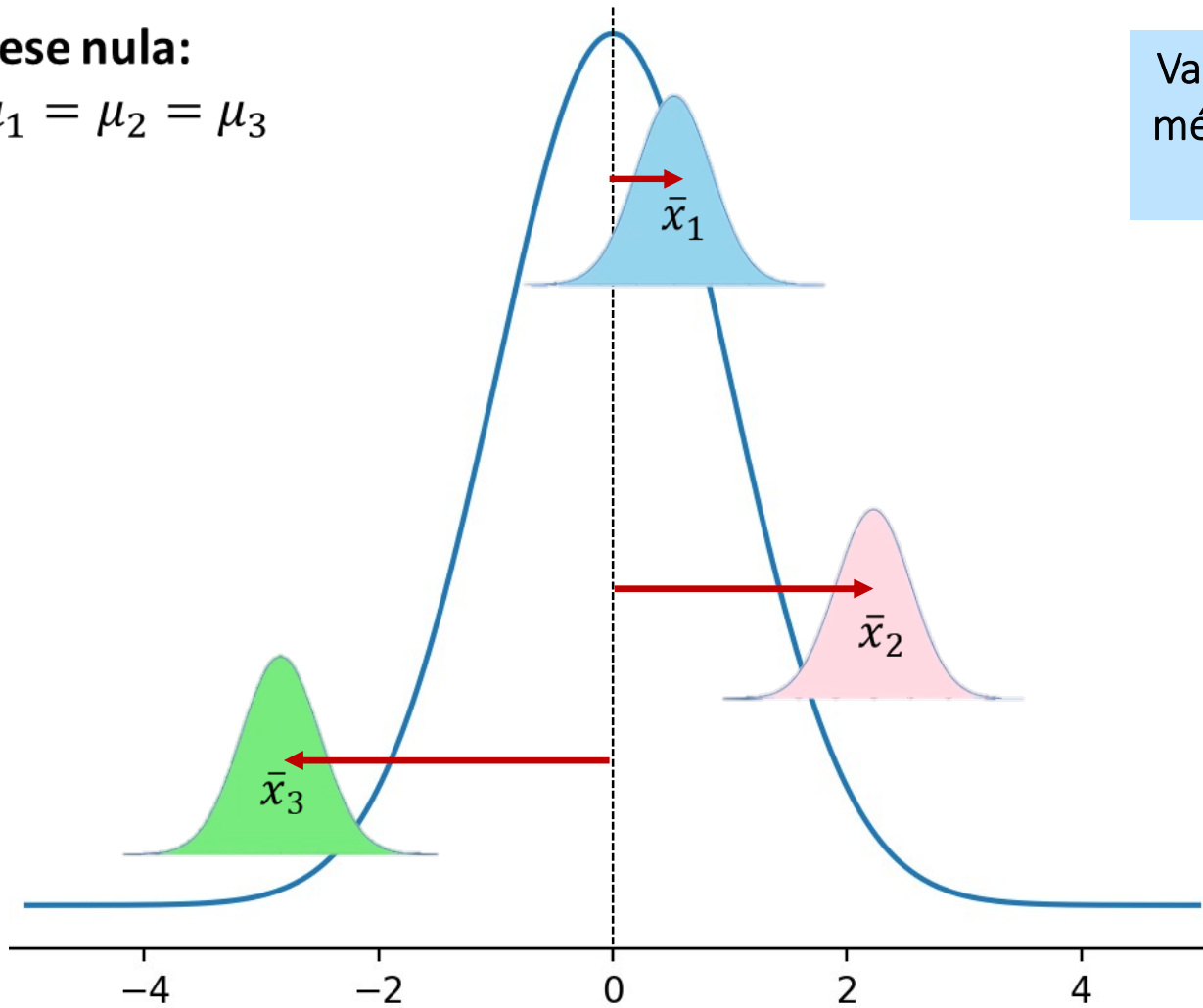


# ANOVA (Análise de Variâncias)

**Hipótese nula:**

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

Varição ENTRE as  
médias em relação  
à média geral

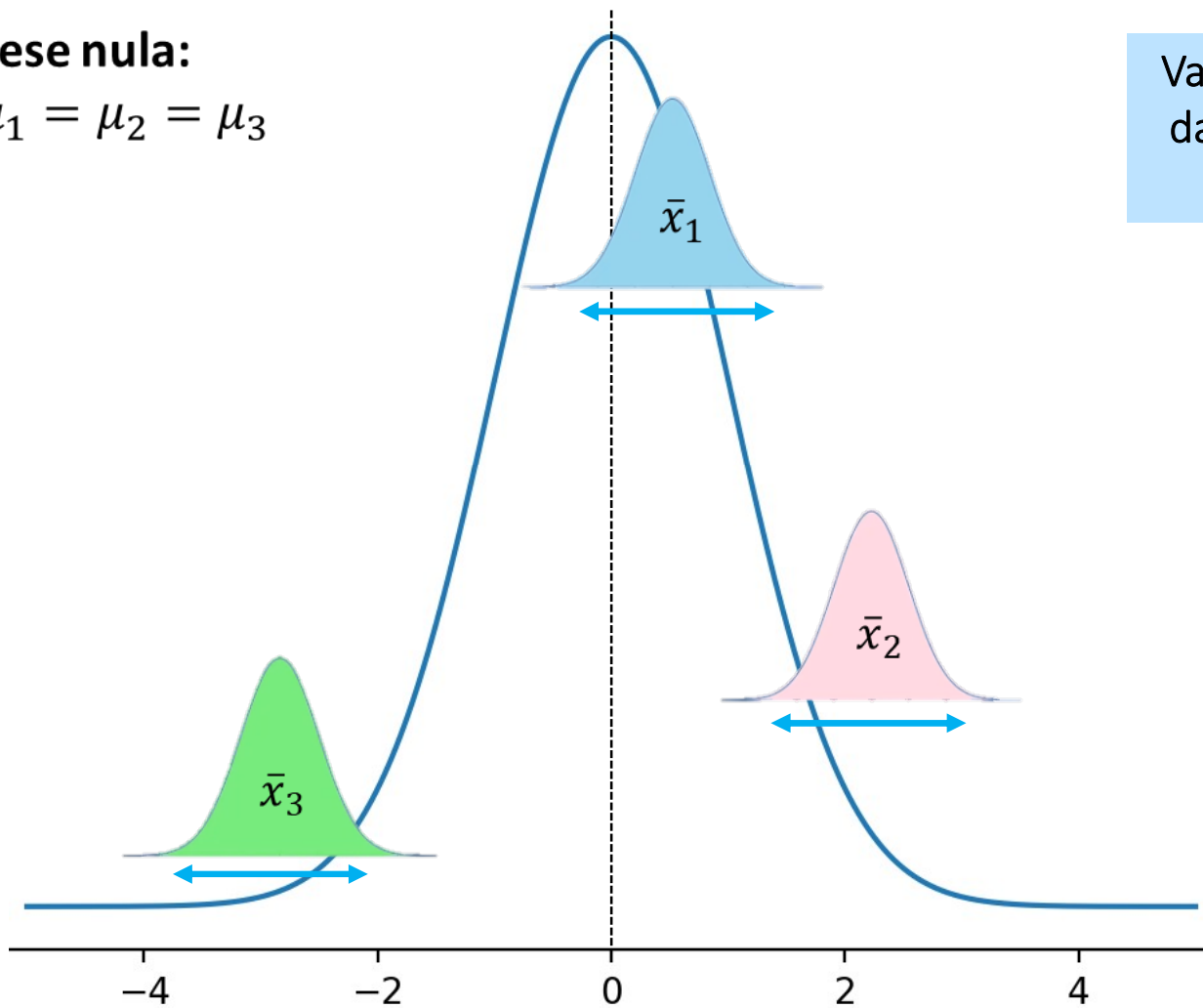


# ANOVA (Análise de Variâncias)

**Hipótese nula:**

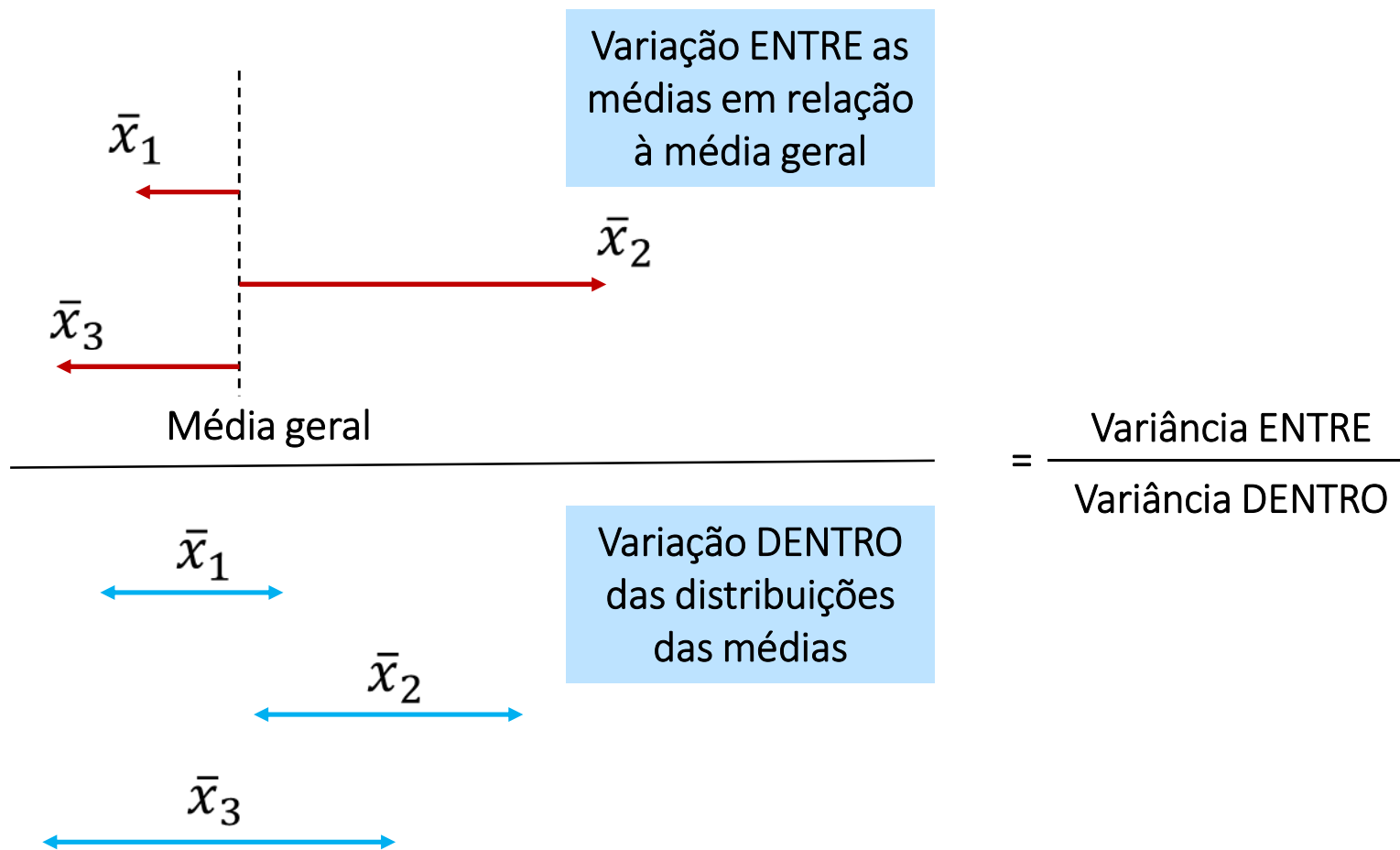
$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

Varição DENTRO  
das distribuições  
das médias



# ANOVA (Análise de Variâncias)

Análise de Variâncias é uma *razão* de variabilidades



# ANOVA (Análise de Variâncias)

Análise de Variâncias é uma *razão* de variabilidades

$$\frac{\text{Variância ENTRE}}{\text{Variância DENTRO}} \left. \vphantom{\frac{\text{Variância ENTRE}}{\text{Variância DENTRO}}} \right\} \text{Componentes da Variância Total}$$

$$\text{Variância ENTRE} + \text{Variância DENTRO} = \text{Variância Total}$$

Se a variância ENTRE as médias (em relação à média geral) no numerador for relativamente grande em comparação à variância DENTRO (variabilidade interna) no denominador, a razão será maior que 1. As amostras muito provavelmente NÃO são provenientes de uma população comum: REJEITAMOS A HIPÓTESE NULA de que as médias são iguais.

# ANOVA (Análise de Variâncias)

Análise de Variâncias é uma *razão* de variabilidades

$$\frac{\text{GRANDE}}{\text{pequeno}} = \text{Rejeitar } H_0$$

Pelo menos uma média é discrepante e as distribuições são estreitas e distintas

$$\frac{\text{Variância ENTRE}}{\text{Variância DENTRO}} \quad \frac{\text{similar}}{\text{similar}} = \text{Não rejeitar } H_0$$

Médias são razoavelmente próximas da média geral e/ou as distribuições se sobrepõem

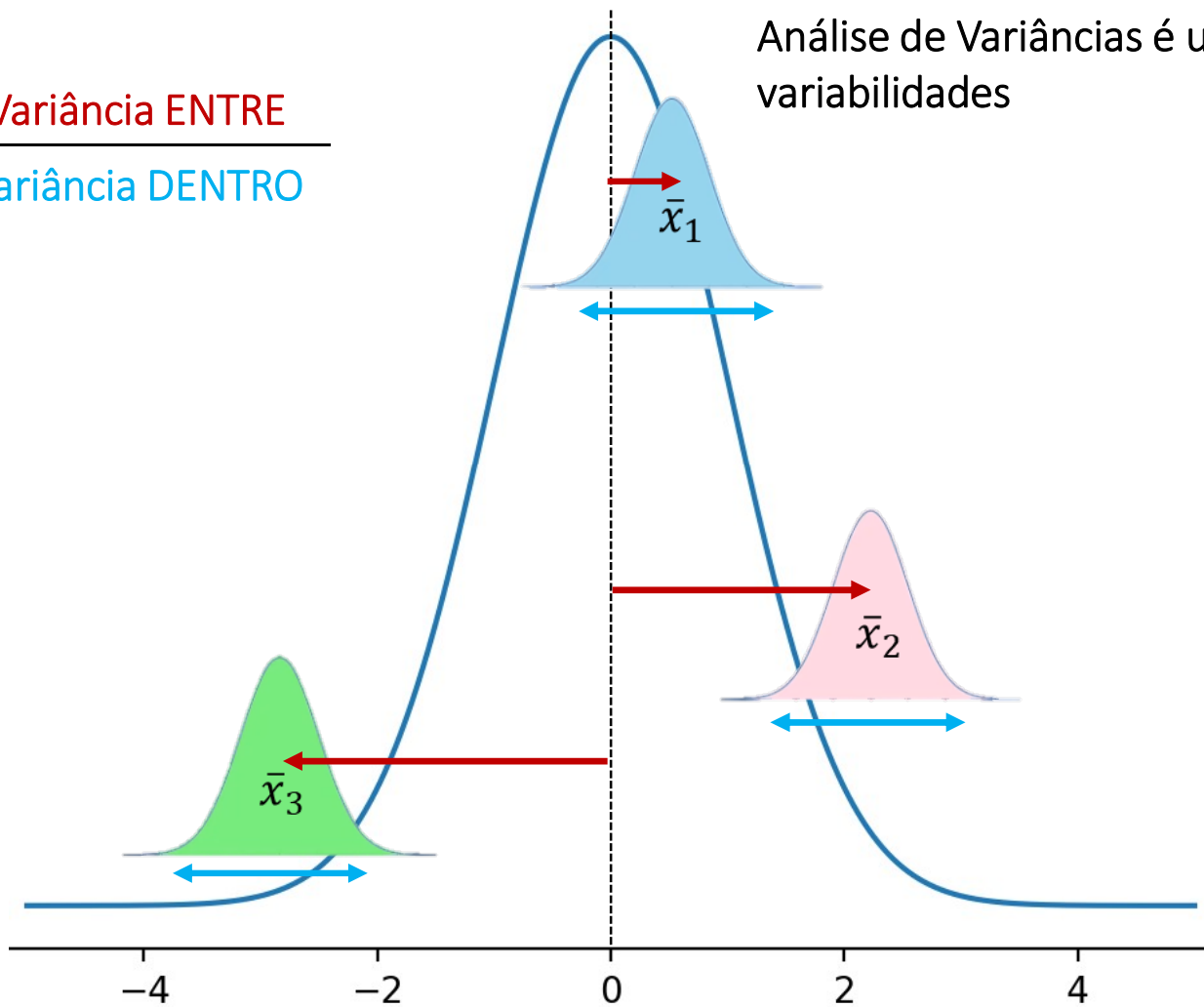
$$\frac{\text{pequeno}}{\text{GRANDE}} = \text{Não rejeitar } H_0$$

As médias são muito próximas da média geral e/ou as distribuições se sobrepõem

# ANOVA (Análise de Variâncias)

$$F = \frac{\text{Variância ENTRE}}{\text{Variância DENTRO}}$$

Análise de Variâncias é uma *razão* de variabilidades



# ANOVA

## Fator único

Exemplo:

Três operadores de um mesmo instrumento de medição de um laboratório de análises realizaram medidas repedidas de um mesmo mensurando (4 repetições para cada operador).

Fator único: Operador

Colunas/Grupos

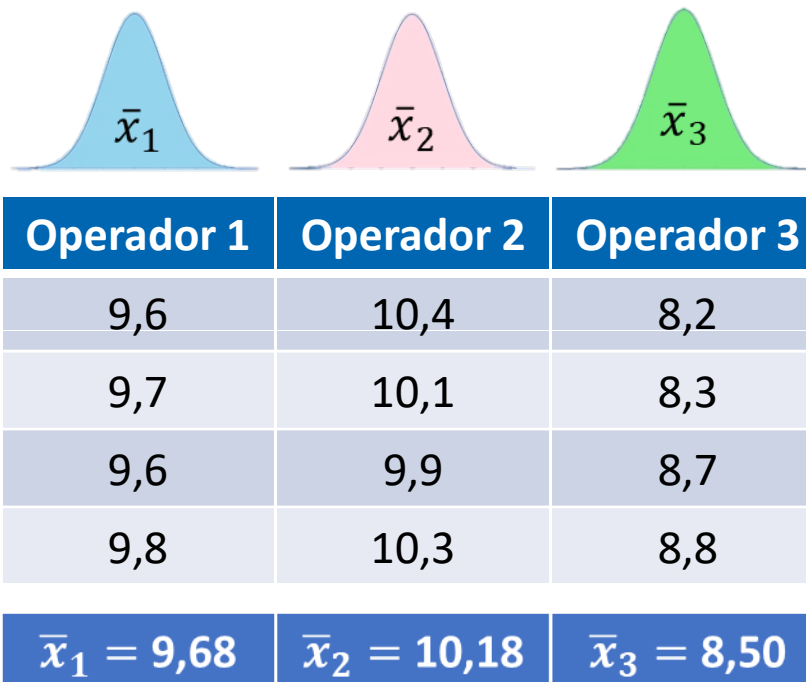
	Operador 1	Operador 2	Operador 3
Repetições	9,6	10,4	8,2
	9,7	10,1	8,3
	9,6	9,9	8,7
	9,8	10,3	8,8

Níveis do fator

# ANOVA

## Fator único

Exemplo:



Média geral:

Média de todas as 12 medidas.

$$\bar{\bar{x}} = 9,45$$

Uma primeira olhada para as médias nos mostra o que?

# ANOVA (Análise de Variâncias)

Variância revisitada e soma dos quadrados

Variância amostral

1. Diferenças quadráticas

2. Média

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Média das diferenças quadráticas

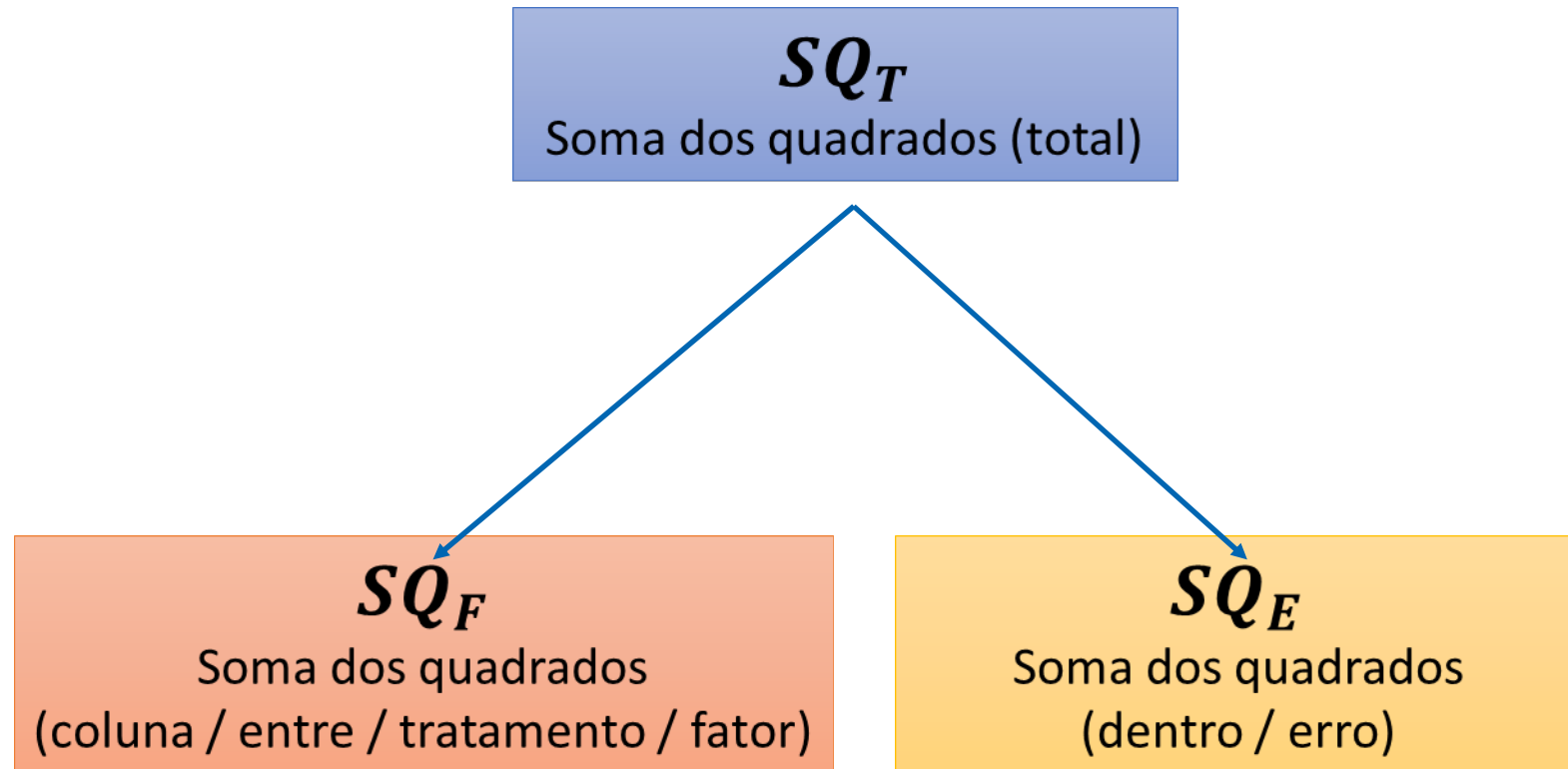
Soma dos quadrados

$$SQ = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

# ANOVA

## Fator único

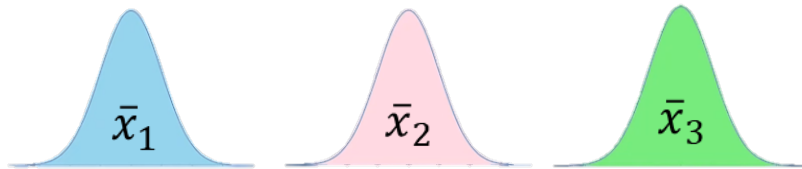
Particionando a soma dos quadrados



# ANOVA

## Fator único

Exemplo:



Operador 1	Operador 2	Operador 3
9,6	10,4	8,2
9,7	10,1	8,3
9,6	9,9	8,7
9,8	10,3	8,8
$\bar{x}_1 = 9,68$	$\bar{x}_2 = 10,18$	$\bar{x}_3 = 8,50$

**$SQ_T$**   
Soma dos quadrados (total)

1. Encontrar a diferença entre cada medida e a média geral
2. Elevar ao quadrado
3. Somar todos os resultados

$$\bar{\bar{x}} = 9,45$$

$$SQ_T = (9,6 - 9,45)^2 + (9,7 - 9,45)^2 + (9,6 - 9,45)^2 + \dots + (8,8 - 9,45)^2$$

$$SQ_T = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

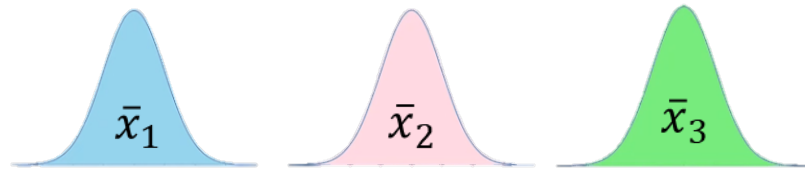
$n \rightarrow$  Número de medidas repetidas

$k \rightarrow$  Número de grupos (níveis do fator)

# ANOVA

## Fator único

Exemplo:



Operador 1	Operador 2	Operador 3
9,6	10,4	8,2
9,7	10,1	8,3
9,6	9,9	8,7
9,8	10,3	8,8
$\bar{x}_1 = 9,68$	$\bar{x}_2 = 10,18$	$\bar{x}_3 = 8,50$

**$SQ_F$**   
Soma dos quadrados  
(coluna / entre / tratamento / fator)

1. Encontrar a diferença entre as médias dos grupos e a média geral
2. Elevar ao quadrado
3. Somar todos os resultados
4. Multiplicar por  $n$

$$\bar{\bar{x}} = 9,45$$

$$SQ_F = 4(9,68 - 9,45)^2 + 4(10,18 - 9,45)^2 + 4(8,50 - 9,45)^2$$

$$SQ_F = n \sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

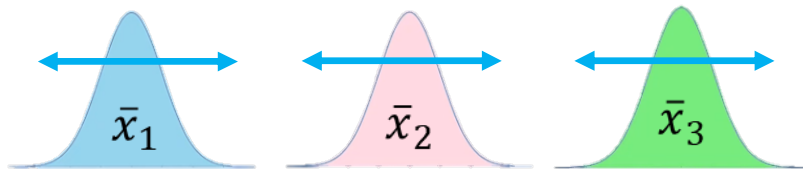
$n \rightarrow$  Número de medidas repetidas

$k \rightarrow$  Número de grupos (níveis do fator)

# ANOVA

## Fator único

Exemplo:



Operador 1	Operador 2	Operador 3
9,6	10,4	8,2
9,7	10,1	8,3
9,6	9,9	8,7
9,8	10,3	8,8
$\bar{x}_1 = 9,68$	$\bar{x}_2 = 10,18$	$\bar{x}_3 = 8,50$

**$SQ_E$**   
Soma dos quadrados  
(dentro / erro)

1. Encontrar a diferença entre cada medida e sua média do grupo
2. Elevar ao quadrado
3. Somar todos os resultados

$$SQ_E = (9,6 - 9,68)^2 + (9,7 - 9,68)^2 + \dots + (8,8 - 8,50)^2$$

$$SQ_E = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

$n \rightarrow$  Número de medidas repetidas

$k \rightarrow$  Número de grupos (níveis do fator)

# ANOVA

## Fator único -Tabela

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média dos quadrados	F
Entre grupos	$SQ_F$	$\nu_F = k - 1$	$MQ_F = \frac{SQ_F}{\nu_F}$	$F = \frac{MQ_F}{MQ_E}$
Dentro dos grupos	$SQ_E$	$\nu_E = k(n - 1)$	$MQ_E = \frac{SQ_E}{\nu_E}$	
Total	$SQ_T$	$\nu_T = kn - 1$		

F crítico:

$$F_{\alpha; \nu_F; \nu_E}$$

No Excel:

$$=INV.F.CD(\text{signif.}; GL1; GL2)$$

Se F calculado > F crítico: **Rejeitar  $H_0 \rightarrow$  Operador faz diferença**

Se F calculado < F crítico: **Não rejeitar  $H_0 \rightarrow$  Operador não faz diferença**

$n \rightarrow$  Número de medidas repetidas

$k \rightarrow$  Número de grupos (níveis do fator)

# ANOVA

## Fator único -Tabela

Fonte de variação	Soma de quadrados	Graus de liberdade	Média dos quadrados	F
Entre grupos	$SQ_F$	$\nu_F = 3 - 1$	$MQ_F = \frac{SQ_F}{2}$	$F = \frac{MQ_F}{MQ_E}$
Dentro dos grupos	$SQ_E$	$\nu_E = 3(4 - 1)$	$MQ_E = \frac{SQ_E}{9}$	
Total	$SQ_T$	$\nu_T = 3 * 4 - 1$		

$n = 4$   
 $k = 3$

F crítico:

$$F_{\alpha; \nu_F; \nu_E} \rightarrow F_{0,05; 2; 9}$$

No Excel:

$$=INV.F.CD(0,05; 2; 9)$$

$n \rightarrow$  Número de medidas repetidas

$k \rightarrow$  Número de grupos (níveis do fator)

# ANOVA

## Fator único

### Exercício

As concentrações de Fe (mg/100g) em uma formulação de vitaminas / minerais determinada por AAS usando diferentes métodos de dissolução ao apresentadas na tabela;

Métodos						
Dry	Micro	ZZC	SZC	LTA	ZZF	SZF
5,59	5,67	5,75	4,74	5,52	5,52	5,43
5,59	5,67	5,47	4,45	5,47	5,62	5,52
5,37	5,55	5,43	4,65	5,66	5,47	5,43
5,54	5,57	5,45	4,94	5,52	5,18	5,43
5,37	5,43	5,24	4,95	5,62	5,43	5,52
5,42	5,57	5,47	5,06	5,76	5,33	5,52

Existe compatibilidade entre os resultados dos métodos para a uma probabilidade de 95% de confiança?

$$n_j = 6$$

$$\bar{x} = 5,40$$

$\bar{x}_j$						
5,48	5,58	5,47	4,80	5,59	5,43	5,48

$(\bar{x}_j - \bar{x})^2$						
0,006	0,032	0,005	0,363	0,035	0,001	0,006

$n_j(\bar{x}_j - \bar{x})^2$						
0,036	0,190	0,028	2,175	0,212	0,005	0,036

$$SS_A = \sum_j n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$

2,682

# ANOVA

## Fator único

### Exercício

As concentrações de Fe (mg/100g) em uma formulação de vitaminas / minerais determinada por AAS usando diferentes métodos de dissolução ao apresentadas na tabela;

Métodos						
Dry	Micro	ZZC	SZC	LTA	ZZF	SZF
5,59	5,67	5,75	4,74	5,52	5,52	5,43
5,59	5,67	5,47	4,45	5,47	5,62	5,52
5,37	5,55	5,43	4,65	5,66	5,47	5,43
5,54	5,57	5,45	4,94	5,52	5,18	5,43
5,37	5,43	5,24	4,95	5,62	5,43	5,52
5,42	5,57	5,47	5,06	5,76	5,33	5,52

Existe compatibilidade entre os resultados dos métodos para a uma probabilidade de 95% de confiança?

$\bar{x}_j$						
5,48	5,58	5,47	4,80	5,59	5,43	5,48

$(x_{ij} - \bar{x}_j)^2$						
0,012	0,009	0,079	0,003	0,005	0,009	0,002
0,012	0,009	0,000	0,121	0,015	0,038	0,002
0,012	0,001	0,001	0,022	0,005	0,002	0,002
0,004	0,000	0,000	0,020	0,005	0,060	0,002
0,012	0,022	0,052	0,023	0,001	0,000	0,002
0,004	0,000	0,000	0,068	0,028	0,009	0,002

$$SS_R = \sum_j \sum_i (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

0,676

# ANOVA

## Fator único

Exercício

Fonte	v	Soma Quadr	Media Quad	F <sub>cal</sub>	F <sub>tab</sub>
Entre grupos	$k_{\text{grupos}}-1$	$SS_A$	$MS_A=SS_A/k_{\text{grupos}}-1$	$MS_A/MSR$	
Dentro dos Grupos	$n_t-k_{\text{grupos}}$	$SS_R$	$MS_R=SS_R/n_t-k_{\text{grupos}}$		
Total	$n_t-1$	$SS_T$			

$$K_{\text{grupos}} = 7$$

$$n_{\text{total}} = 42$$

Fonte	n	Soma Quadr	Media Quad	F	F <sub>tab</sub>
Entre grupos	6	2,683	0,447	23,15	2,37
Dentro dos Grupos	35	0,676	0,019		
Total	41	3,360			

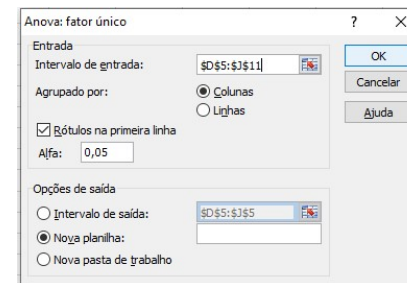
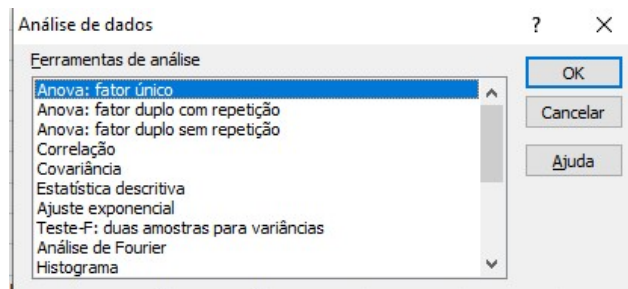
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i = \dots \mu_k \quad \text{se} \quad F_{\text{cal}} < F_{\text{tab}}$$

A hipótese nula não é aceita para um nível de 95% visto que  $F_{\text{cal}} > F_{\text{tab}}$ . Pelo menos uma das médias é diferente das demais.

# ANOVA

## Fator único

### Exercício Excel



Dry	Micro	ZZC	SZC	LTA	ZZF	SZF
5,59	5,67	5,75	4,74	5,52	5,52	5,43
5,59	5,67	5,47	4,45	5,47	5,62	5,52
5,37	5,55	5,43	4,65	5,66	5,47	5,43
5,54	5,57	5,45	4,94	5,52	5,18	5,43
5,37	5,43	5,24	4,95	5,62	5,43	5,52
5,42	5,57	5,47	5,06	5,76	5,33	5,52

Anova: fator único						
RESUMO						
Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância		
Dry	6	32,88	5,48	0,01112		
Micro	6	33,46	5,576667	0,007947		
ZZC	6	32,81	5,468333	0,026657		
SZC	6	28,79	4,798333	0,051657		
LTA	6	33,55	5,591667	0,011777		
ZZF	6	32,55	5,425	0,02363		
SZF	6	32,85	5,475	0,00243		
ANOVA						
Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	2,683424	6	0,447237	23,15292	7,73E-11	2,371781
Dentro dos grupos	0,676083	35	0,019317			
Total	3,359507	41				

## TESTE DE TUKEY

Quando a hipótese nula não é aceita pelo menos uma ou mais médias são diferentes da demais.

Pergunta: Quais ou qual das médias são diferentes da demais?

O teste do Tukey *HSD* (*Honestly Significant Difference*) tem por objetivo apontar quais ou qual da médias são diferentes da demais?

*HSD* corresponde à mínima diferença entre as médias. Se as médias diferem por mais que *HSD*, elas são diferentes.

Nível de significância = 0,05

df	k -->									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	17.969	26.976	32.819	37.082	40.408	43.119	45.397	47.357	49.071	
2	6.085	8.331	9.798	10.881	11.734	12.435	13.027	13.539	13.988	
3	4.501	5.910	6.825	7.502	8.037	8.478	8.852	9.177	9.462	
4	3.926	5.040	5.757	6.287	6.706	7.053	7.347	7.602	7.826	
5	3.635	4.602	5.218	5.673	6.033	6.330	6.582	6.801	6.995	
6	3.460	4.339	4.896	5.305	5.628	5.895	6.122	6.319	6.493	
7	3.344	4.165	4.681	5.060	5.359	5.606	5.815	5.997	6.158	
8	3.261	4.041	4.529	4.886	5.167	5.399	5.596	5.767	5.918	
9	3.199	3.948	4.415	4.755	5.024	5.244	5.432	5.595	5.738	
10	3.151	3.877	4.327	4.654	4.912	5.124	5.304	5.460	5.598	
11	3.113	3.820	4.256	4.574	4.823	5.028	5.202	5.353	5.486	
12	3.081	3.773	4.199	4.508	4.750	4.950	5.119	5.265	5.395	
13	3.055	3.734	4.151	4.453	4.690	4.884	5.049	5.192	5.318	
14	3.033	3.701	4.111	4.407	4.639	4.829	4.990	5.130	5.253	
15	3.014	3.673	4.076	4.367	4.595	4.782	4.940	5.077	5.198	
16	2.998	3.649	4.046	4.333	4.557	4.741	4.896	5.031	5.150	
17	2.984	3.628	4.020	4.303	4.524	4.705	4.858	4.991	5.108	
18	2.971	3.609	3.997	4.276	4.494	4.673	4.824	4.955	5.071	
19	2.960	3.593	3.977	4.253	4.468	4.645	4.794	4.924	5.037	
20	2.950	3.578	3.958	4.232	4.445	4.620	4.768	4.895	5.008	
21	2.941	3.565	3.942	4.213	4.424	4.597	4.743	4.870	4.981	
22	2.933	3.553	3.927	4.196	4.405	4.577	4.722	4.847	4.957	
23	2.926	3.542	3.914	4.180	4.388	4.558	4.702	4.826	4.935	
24	2.919	3.532	3.901	4.166	4.373	4.541	4.684	4.807	4.915	
25	2.913	3.523	3.890	4.153	4.358	4.526	4.667	4.789	4.897	

Fonte	v	Soma Quadr	Media Quad	F <sub>cal</sub>	F <sub>tab</sub>
Entre grupos	k <sub>grupos</sub> -1	SS <sub>A</sub>	MS <sub>A</sub> =SS <sub>A</sub> /k <sub>grupos</sub> -1	MS <sub>A</sub> /MS <sub>R</sub>	
Dentro dos Grupos	n <sub>t</sub> -k <sub>grupos</sub>	SS <sub>R</sub>	MS <sub>R</sub> =SS <sub>R</sub> /n <sub>t</sub> -k <sub>grupos</sub>		
Total	n <sub>t</sub> -1	SS <sub>T</sub>			

$$HSD = q_{\alpha}(k, v_E) \sqrt{\frac{MS_R}{n}}$$

↑ Média dos quadrados do erro (interna)  
↑ Número de repetições internas  
↑ Parâmetro q

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \dots = \mu_K$$

se

$$\mu_i - \mu_j \dots = \mu_i - \mu_K < HSD$$

# TESTE DE TUKEY

Métodos						
Dry	Micro	ZZC	SZC	LTA	ZZF	SZF
5,59	5,67	5,75	4,74	5,52	5,52	5,43
5,59	5,67	5,47	4,45	5,47	5,62	5,52
5,37	5,55	5,43	4,65	5,66	5,47	5,43
5,54	5,57	5,45	4,94	5,52	5,18	5,43
5,37	5,43	5,24	4,95	5,62	5,43	5,52
5,42	5,57	5,47	5,06	5,76	5,33	5,52

$\bar{x}_j$						
5,48	5,58	5,47	4,80	5,59	5,43	5,48

Fonte	n	Soma Quadr	Media Quad	F	Ftab
Entre grupos	6	2,683	0,447	23,15	2,37
Dentro dos Grupos	35	0,676	0,019		
Total	41	3,360			

$v_E$	$K$																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	50.6	52.0	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58.0	58.8	59.6
2	6.08	8.33	9.80	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0	14.4	14.7	15.1	15.4	15.7	15.9	16.1	16.4	16.6	16.8
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.2	10.3	10.5	10.7	10.8	11.0	11.1	11.2
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
$\infty$	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

$k = 7$

$v_E = 35$

$n = 6$

$MS_R = 0,019$



$q_\alpha(K, v_E)$	
30	4,46
35	4,425
40	4,39

$$HSD = q_\alpha(K, v_E) \sqrt{\frac{MS_R}{n}}$$

$$HSD = 4,425 \sqrt{\frac{0,019}{6}} = 0,251$$

## TESTE DE TUKEY

$\Delta$	$q(K;v_E)$	HSD
Media 1/2	0,10	0,251
Media 1/3	0,01	0,251
Media 1/4	0,68	0,251
Media 1/5	0,11	0,251
Media 1/6	0,05	0,251
Media 1/7	0,00	0,251
Media 2/3	0,11	0,251
Media 2/4	0,78	0,251
Media 2/5	0,01	0,251
Media 2/6	0,15	0,251
Media 2/7	0,10	0,251
Media 3/4	0,67	0,251
Media 3/5	0,12	0,251
Media 3/6	0,04	0,251
Media 3/7	0,01	0,251
Media 4/5	0,79	0,251
Media 4/6	0,63	0,251
Media 4/7	0,68	0,251
Media 5/6	0,16	0,251
Media 5/7	0,11	0,251
Media 6/7	0,05	0,251

Métodos						
Dry	Micro	ZZC	SZC	LTA	ZZF	SZF
5,59	5,67	5,75	4,74	5,52	5,52	5,43
5,59	5,67	5,47	4,45	5,47	5,62	5,52
5,37	5,55	5,43	4,65	5,66	5,47	5,43
5,54	5,57	5,45	4,94	5,52	5,18	5,43
5,37	5,43	5,24	4,95	5,62	5,43	5,52
5,42	5,57	5,47	5,06	5,76	5,33	5,52

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i = \dots = \mu_k$$

se

$$\mu_i - \mu_j \dots = \mu_i - \mu_K < HSD$$

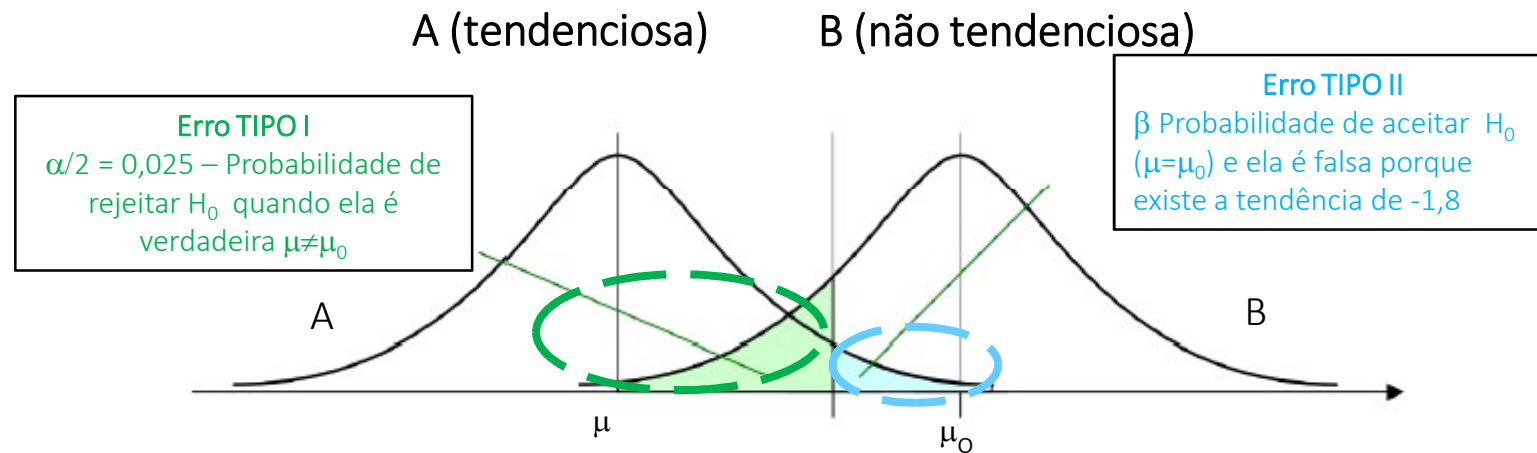
Conforme tabela da comparação dos valores de HSD e os da diferença entre médias, o método SZC é diferente do demais para uma probabilidade de 95%.

## ETAPAS DE CÁLCULO DO ERRO $\beta$ E POTÊNCIA DO TESTE

1. Suposição do risco  $\alpha$  (rejeitar  $H_0$ );
2. Para  $\alpha/2$ ;
3. Identificar na tabela o valor de  $z$  correspondente a  $P(z) = 1 - \alpha/2$  para a distribuição não tendenciosa;
4. Calcular o LI do intervalo de confiança  $m_0$  (distribuição não tendenciosa)  $LI(\mu_0) = \mu_0 - z\sigma / \sqrt{n}$
5. Calcular o  $z_\beta$  (distribuição tendenciosa)  $\longrightarrow z_\beta = \frac{|LI(\mu_0) - \bar{x}|}{\sigma / \sqrt{n}}$
6. Identificar na tabela a probabilidade  $P(z)$  para  $z_\beta$   $\longrightarrow p_b = 1 - P(z)$
7. Potência do teste  $\longrightarrow 1 - p_b$

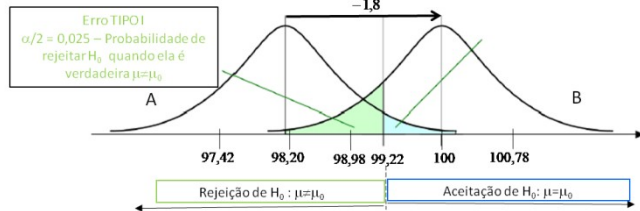
# Erro Tipo I ou $\alpha$ Erro Tipo II ou $\beta$

Erro Tipo I ou  $\alpha$  Rejeitar  $H_0$  quando ela é uma verdade.  
Erro Tipo II ou  $\beta$  Aceitar  $H_0$  quando ela é falsa.



# TAMANHO DE AMOSTRA

(σ conhecido)



$$z_{\beta} = \frac{|LI(\mu_0) - \bar{x}|}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{|99,22 - 98,20|}{0,81 / \sqrt{4}} = 2,54$$

$$n \geq \left[ (z_{\alpha/2} + z_{\beta}) \frac{\sigma}{\delta} \right]^2 \quad \text{ou} \quad n \geq \left[ \frac{(z_{\alpha/2} + z_{\beta})}{\lambda} \right]^2$$

onde  $\lambda = \frac{\delta}{\sigma}$

$z_{\alpha/2}$	1,96
$z_{\beta}$	2,54
$\sigma$	0,8
$\delta$	-1,8
$\lambda$	-2,25
<b>n</b>	<b>4</b>

$$n \geq \left[ (1,96 + 2,54) \frac{0,8}{-1,8} \right]^2 \geq 4$$

$$\lambda = \frac{1,8}{0,8} = 2,25 \quad n \geq \left[ \frac{(1,96 + 2,54)}{2,25} \right]^2 \geq 4$$

(σ desconhecido)

$$n \geq \left[ (t_{\alpha/2} + z_{\beta}) \frac{s}{\delta} \right]^2 \quad \text{ou} \quad n \geq \left[ \frac{(t_{\alpha/2} + z_{\beta})}{\lambda} \right]^2$$

onde  $\lambda = \frac{\delta}{s}$

$$t = 3,182$$

$t_{\alpha/2}$	3,182
$z_{\beta}$	2,54
$\sigma$	0,8
$\delta$	-1,8
$\lambda$	-2,25
<b>n &gt;</b>	<b>6</b>

$$n \geq \left[ (3,182 + 2,54) \frac{0,8}{-1,8} \right]^2 \geq 6$$

$$\lambda = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{1,8}{0,8} = 2,25$$

$$n \geq \left[ \frac{(3,182 + 2,54)}{2,25} \right]^2 \geq 6$$

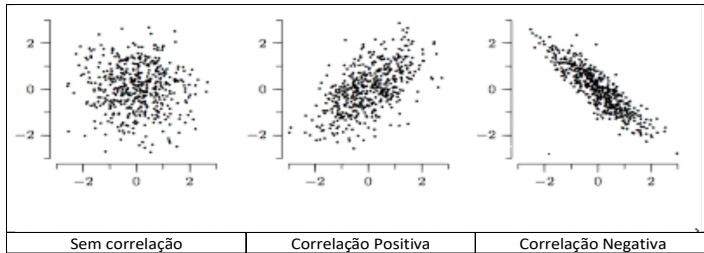
TABLE A-4. PERCENTILES OF THE t DISTRIBUTION



df	t <sub>.60</sub>	t <sub>.70</sub>	t <sub>.80</sub>	t <sub>.90</sub>	t <sub>.95</sub>	t <sub>.975</sub>	t <sub>.99</sub>	t <sub>.995</sub>
1	.325	.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.289	.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.277	.584	.978	1.638	2.953	3.182	4.541	5.841
4	.271	.569	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.267	.559	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.265	.553	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.263	.549	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.262	.546	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.261	.543	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.260	.542	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.260	.540	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.259	.539	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.259	.538	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.258	.537	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.258	.536	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.258	.535	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.257	.534	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.257	.534	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.257	.533	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.257	.533	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.257	.532	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.256	.532	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.256	.532	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.256	.531	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.256	.531	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.256	.531	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.256	.531	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.256	.530	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.256	.530	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.256	.530	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.255	.529	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.254	.527	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.254	.526	.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.253	.524	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

# CORRELAÇÃO

A análise de correlação é aplicada para estudar quão forte é a associação entre variáveis aleatórias.



$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$



Estrutura	Concentração µg/g		
	Cu	Mn	Zn
1	25,8	1,03	78,0
2	24,2	0,96	81,8
3	27,3	1,05	69,4
4	32,8	1,49	76,1
5	27,3	1,84	62,5
6	17,9	1,23	60,1
7	14,0	1,09	34,2
8	13,3	0,96	35,5
9	10,0	0,80	33,3
10	10,9	0,77	38,9
11	10,7	0,80	40,8
12	16,0	1,10	46,4
<b>Média</b>	<b>19,2</b>	<b>1,09</b>	<b>55</b>
<b>Desvio padrão</b>	<b>7,9</b>	<b>0,31</b>	<b>19</b>

Estrutura	Concentração µg/g			Cu-Media Cu	Mn-Media Mn	Zn-Media Zn	(Cu-Media Cu)*(Mn-Media Mn)	(Cu-Media Cu)*(Zn-Media Zn)	(Mn-Media Mn)*(Zn-Media Zn)
	Cu	Mn	Zn						
1	25,8	1,03	78	6,62	-87,36	23,25	-578,00	153,84	-2031,0
2	24,2	0,96	81,8	5,02	-87,43	27,05	-438,59	135,70	-2364,9
3	27,3	1,05	69,4	8,12	-87,34	14,65	-708,88	118,91	-1279,5
4	32,8	1,49	76,1	13,62	960,61	21,35	13080,36	290,72	20509,1
5	27,3	1,84	62,5	8,12	-86,55	7,75	-702,46	62,90	-670,7
6	17,9	1,23	60,1	-1,28	-87,16	5,35	111,85	-6,87	-466,3
7	14	1,09	34,2	-5,18	-87,30	-20,55	452,48	106,52	1793,9
8	13,3	0,96	35,5	-5,88	-87,43	-19,25	514,36	113,25	1682,9
9	10	0,8	33,3	-9,18	-87,59	-21,45	804,33	196,98	1878,7
10	10,9	0,77	38,9	-8,28	-87,62	-15,85	725,75	131,29	1388,7
11	10,7	0,8	40,8	-8,48	-87,59	-13,95	743,02	118,34	1221,8
12	16	1,1	46,4	-3,18	-87,29	-8,35	277,86	26,58	728,8
<b>Soma</b>							<b>14282,08</b>	<b>1448,17</b>	<b>22391,70</b>

<b>Média</b>	<b>Cu</b>	<b>Mn</b>	<b>Zn</b>
	19,18	88,39	54,75
<b>s</b>	<b>Cu</b>	<b>Mn</b>	<b>Zn</b>
	7,89	302,52	18,59
<b>Cov</b>	<b>Cu/Mn</b>	<b>Cu/Zn</b>	<b>Mn/Zn</b>
	1298	132	2036
<b>r</b>	<b>Cu/Mn</b>	<b>Cu/Zn</b>	<b>Mn/Zn</b>
	0,54	0,90	0,36

# CURVA DE CALIBRAÇÃO

Em muitas situações, informações sobre duas ou mais variáveis associadas são obtidas para estudar sua relação. Dependendo da natureza das variáveis, a investigação é realizada por análise de regressão ou por análise de correlação.

A análise de regressão é usada para estudar a relação entre duas ou mais variáveis. Essa relação é expressa como uma função matemática que também pode ser usada para prever uma variável dependente a partir do conhecimento da (s) outra (s) que são denominadas independentes.

As técnicas de regressão do modelo I assumem que a variável independente não está sujeita a erro.

Uma aplicação importante da análise de regressão do Modelo I é a curva de calibração, onde uma resposta instrumental está relacionada à concentração conhecida do analito dos padrões de calibração.

Se ambas as variáveis estiverem sujeitas a erro, as técnicas de regressão do Modelo II, que levam em consideração o erro associado a ambas as variáveis, devem ser aplicadas. É o caso, por exemplo, de estudos de comparação de métodos em que existem erros de medição nos dois métodos.

# CURVA DE CALIBRAÇÃO

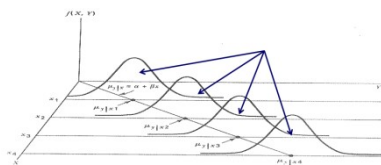
O objetivo principal da análise de regressão é estimar os coeficientes de regressão que têm um significado bem definido.

O uso de uma curva de calibração para determinar a concentração de um analito em uma amostra é uma aplicação importante da regressão linear. A variável  $y$  representa as medidas de resposta e a variável  $x$  a concentração das soluções padrão. Os erros cometidos na preparação dos padrões costumam ser insignificantes em comparação com os erros de medição.

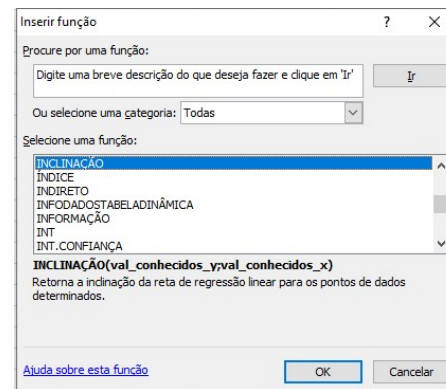
Se assumirmos que a verdadeira relação entre a resposta e a concentração é uma linha reta, o modelo que descreve essa relação é:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x$$

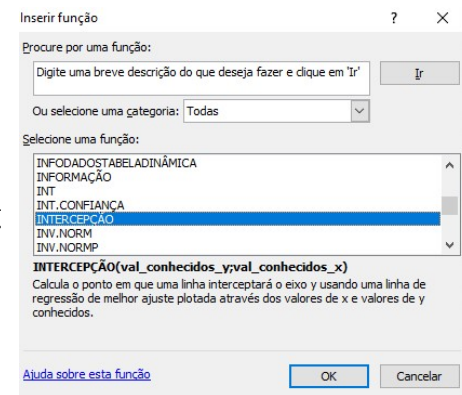
Os parâmetros do modelo,  $\beta_0$  (intercepção) e  $\beta_1$  (inclinação), são desconhecidos. No entanto, pode-se usar as informações fornecidas pelas medidas para obter estimativas,  $b_0$  e  $b_1$ , de  $\beta_0$  e  $\beta_1$ , respectivamente.



$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$



$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$



Essas estimativas,  $b_0$  e  $b_1$ , são calculadas de maneira que a curva de calibração estimada é:

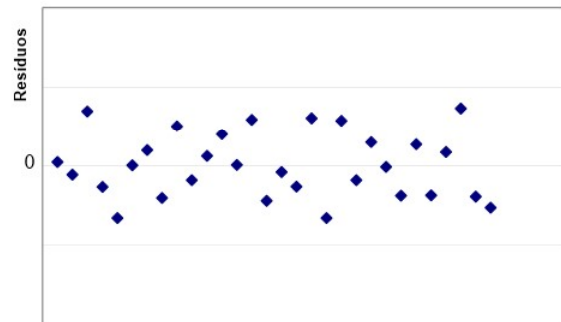
$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

# CURVA DE CALIBRAÇÃO

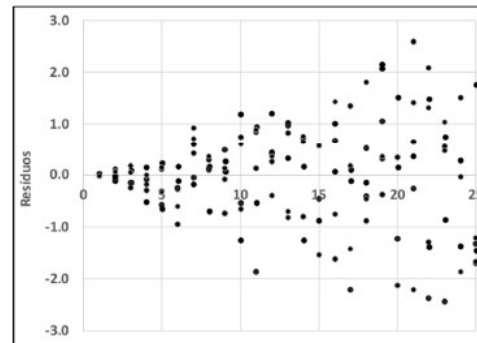
## Validação do modelo

A validação do modelo é importante para verificar se o modelo selecionado é o correto (por exemplo, o modelo é realmente uma linha reta ou os dados são melhor descritos por uma linha curva). [A análise dos resíduos \( \$\Delta\$ \) e a análise de variância \(ANOVA\) são úteis para fins de validação do modelo.](#)

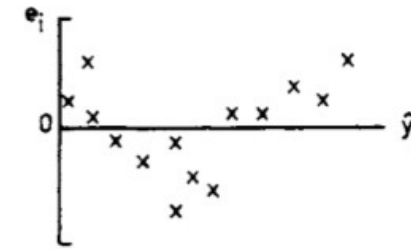
$$\Delta = y_i - \hat{y} = y_i - (b_0 + b_1x)$$



Homocedástico



Heterocedástico



Resíduos do ajuste de uma linha reta aos dados que são melhor representados por uma curva

Uma estatística importante na análise de regressão é a variância residual  $S_e^2$ .

$$s_e^2 = \frac{\sum \Delta^2}{n_t - 2} = \frac{\sum (y_i - \hat{y})^2}{n_t - 2} = \frac{\sum [y_i - (b_0 + b_1x)]^2}{n_t - 2}$$

# CURVA DE CALIBRAÇÃO

Quando há heterocedasticidade a reta de regressão adequada é a ponderada.  
 O coeficientes linear  $b_0$  e angular  $b_1$  são calculados pelas expressões:

$$b_1 = \frac{\sum w_i (x_i - \bar{x}_w)(y_i - \bar{y}_w)}{\sum (x_i - \bar{x}_w)^2} \quad b_0 = \bar{y}_w - b_1 \bar{x}_w \quad w_i = 1/s_{y_i}^2 \quad \bar{x}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \quad \bar{y}_w = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i}$$

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>40</b>	<b>50</b>
<b>y</b>	<b>4</b>	<b>22</b>	<b>44</b>	<b>60</b>	<b>75</b>	<b>104</b>
	3	20	46	63	81	109
	4	21	45	60	79	107
	5	22	44	63	78	101
	4	21	44	63	77	105
<b>Media y</b>	<b>4</b>	<b>21,2</b>	<b>44,6</b>	<b>61,8</b>	<b>78</b>	<b>105,2</b>
<b>sy</b>	<b>0,71</b>	<b>0,84</b>	<b>0,89</b>	<b>1,64</b>	<b>2,24</b>	<b>3,03</b>
<b>s<sup>2</sup>y</b>	<b>0,5</b>	<b>0,7</b>	<b>0,8</b>	<b>2,7</b>	<b>5</b>	<b>9,2</b>
<b>1/sy</b>	<b>1,41</b>	<b>1,20</b>	<b>1,12</b>	<b>0,61</b>	<b>0,45</b>	<b>0,33</b>

<b>Media Pond x</b>	11,914	<b>Media Pond y</b>	26,870
$\sum w_i x_i$	63,832	$\sum w_i y_i$	143,959
$\sum w_i$	5,358	$\sum w_i$	5,358

$x_i$	Media y	sy	1/s <sup>2</sup> y	$w_i x_i$	$w_i y_i$	$x_i - \text{Media Pond } x_i$	$y_i - \text{Media Pond } y_i$	$w_i * (x_i - \text{Media Pond } x_i)^2$	$w_i * (x_i - \text{Media pond } x_i) * (y_i - \text{Media Pond } y_i)$
0	4	0,71	2,00	0,0	8,0	-11,9141	-22,870	283,89	544,951
10	21,2	0,84	1,43	14,3	30,3	-1,9141	-5,670	5,23	15,504
20	44,6	0,89	1,25	25,0	55,7	8,0859	17,730	81,73	179,204
30	61,8	1,64	0,37	11,1	22,9	18,0859	34,930	121,15	233,978
40	78	2,24	0,20	8,0	15,6	28,0859	51,130	157,76	287,206
50	105,2	3,03	0,11	5,4	11,4	38,0859	78,330	157,67	324,268

$\sum w_i * (x_i - \text{Média Pond } x)^2$	807,4313053
$\sum w_i * (x_i - \text{Media pond } x) * (y_i - \text{Media Pond } y_i)$	1585,111595

<b>b<sub>1</sub></b>	1,9632
<b>b<sub>2</sub></b>	3,4807

## CURVA DE CALIBRAÇÃO

Quando assume-se que existem erros nos dois eixos a reta de regressão adequada é a ortogonal. O coeficientes linear e angular são calculados pela expressões:

$$b_1 = \frac{S_y^2 - S_x^2 + \sqrt{(S_x^2 - S_y^2)^2 + 4(\text{cov}_{y,x})^2}}{2(\text{cov}_{y,x})} \qquad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

Amostra	x	y	xi-media x	yi-media y	(xi-media x)*(yi-media y)
1	35	35	-125,5	-123,5	15499,25
2	75	70	-85,5	-88,5	7566,75
3	75	80	-85,5	-78,5	6711,75
4	80	80	-80,5	-78,5	6319,25
5	125	120	-35,5	-38,5	1366,75
6	205	200	44,5	41,5	1846,75
7	205	220	44,5	61,5	2736,75
8	215	200	54,5	41,5	2261,75
9	240	250	79,5	91,5	7274,25
10	350	330	189,5	171,5	32499,25
				Soma	84082,5

<b>Media x</b>	160,5
<b>Media y</b>	158,5
$s_x$	98,4731
$s_y$	95,3954
$S^2_x$	9696,9
$S^2_y$	9100,3
<b>Cov(x,y)</b>	9342,5
$b_1$	0,9686
$b_0$	3,043

## CURVA DE CALIBRAÇÃO

### Intervalo de confiança para a intercepção e a inclinação

Para determinar os intervalos de confiança para a inclinação e a intercepção, precisamos dos desvios padrão de  $b_0$  e de  $b_1$ .

$$s_{b_0} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n_t \sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad s_{b_1} = \frac{s_e}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Os intervalos de confiança bilateral de 95% para intercepção ( $b_0$ ) e inclinação ( $b_1$ ), respectivamente, são calculados da seguinte forma:

$$IC\ 95\% (\beta_0) : b_0 \pm t_{0,025;n_t-2} s_{b_0}$$

$$IC\ 95\% (\beta_1) : b_1 \pm t_{0,025;n_t-2} s_{b_1}$$

## CARTAS DE CONTROLE

- Quando as cartas mostram perda de controle, elas indicam a natureza do problema, por exemplo, tendência ou mudança repentina na média, aumento de variabilidade etc.
- As três cartas de controle mais importantes para este objetivo são: da média, da amplitude, e do desvio padrão.

### Tipos de cartas de controle

Objetivo	$\bar{X}$	R	$\sigma$
Erro Grosseiro	1	2	....
Desvio na média	1	....	....
Desvio na variabilidade	.....	1	2
Flutuações suaves (Tendência)	1	....	....
Flutuações Repentinas (ciclo)	....	1	2

- 1 Tipo de carta de mais recomendado
- 2 Tipo de carta menos recomendada
- Pontos significam que as cartas não são apropriadas.

## CARTAS DE CONTROLE

Pequenas Amostras :  $n < 25$  ; Tamanhos Iguais

	Linha Central	Limites
$\bar{X}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} \pm A_1 \bar{\sigma}$
$\sigma$	$\bar{\sigma}$	$B_4 \bar{\sigma} e B_3 \bar{\sigma}$

$\bar{\bar{X}}$  = média geral

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k}{n}$$

Pequenas Amostras :  $n < 10$  ; Tamanhos Iguais

	Linha Central	Limites
$\bar{X}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$
$R$	$\bar{R}$	$D_4 \bar{R} e D_3 \bar{R}$

$\bar{\bar{X}}$  = média geral

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n}$$

# CARTAS DE CONTROLE

Fatores para Cálculo de Limites de Controle 3 SIGMA																
Carta para Médias		Carta para Desvios Padrão							Carta para Amplitudes							
Fatores para Limites de Controle		Fatores para Linha Central		Fatores para Limites de Controle			Fatores para Linha Central		Fatores para Limites de Controle							
n	A	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	C <sub>2</sub>	1/C <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	d <sub>2</sub>	1/d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
2	2,121	3,760	1,880	0,5642	1,7725	0	1,843	0	3,267	1,128	0,8865	0,853	0	3,686	0	3,267
3	1,732	2,394	1,023	0,7236	1,3820	0	1,858	0	2,568	1,693	0,5907	0,888	0	4,358	0	2,575
4	1,500	1,880	0,729	0,7979	1,2533	0	1,808	0	2,266	2,059	0,4857	0,880	0	4,698	0	2,282
5	1,342	1,596	0,577	0,8407	1,1894	0	1,756	0	2,089	2,326	0,4299	0,864	0	4,918	0	2,115
6	1,225	1,410	0,483	0,8686	1,1512	0,026	1,711	0,030	1,970	2,534	0,3946	0,848	0	5,078	0	2,004
7	1,134	1,277	0,419	0,8882	1,1259	0,105	1,672	0,118	1,882	2,704	0,3698	0,833	0,205	5,203	0,076	1,924
8	1,061	1,175	0,373	0,9027	1,1078	0,167	1,638	0,185	1,815	2,847	0,3512	0,820	0,387	5,307	0,136	1,864
9	1,000	1,094	0,337	0,9139	1,0942	0,219	1,609	0,239	1,761	2,970	0,3376	0,808	0,546	5,394	0,184	1,816
10	0,949	1,028	0,308	0,9227	1,0837	0,262	1,584	0,284	1,716	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,973	0,285	0,9300	1,0753	0,299	1,561	0,321	1,679	3,173	0,3152	0,787	0,812	5,534	0,256	1,744
12	0,866	0,925	0,266	0,9359	1,0684	0,331	1,541	0,354	1,646	3,258	0,3069	0,778	0,924	5,592	0,284	1,716
13	0,832	0,884	0,249	0,9410	1,0627	0,359	1,523	0,382	1,618	3,336	0,2998	0,770	1,026	5,646	0,308	1,692
14	0,802	0,848	0,235	0,9453	1,0579	0,384	1,507	0,406	1,594	3,407	0,2935	0,762	1,121	5,693	0,329	1,671
15	0,775	0,816	0,223	0,9490	1,0537	0,406	1,492	0,428	1,572	3,472	0,2880	0,755	1,207	5,737	0,348	1,652
16	0,750	0,788	0,212	0,9523	1,0501	0,427	1,478	0,448	1,552	3,532	0,2831	0,749	1,285	5,779	0,364	1,636
17	0,728	0,762	0,203	0,9551	1,0470	0,445	1,465	0,466	1,534	3,588	0,2787	0,743	1,359	5,817	0,379	1,621
18	0,707	0,738	0,194	0,9576	1,0442	0,461	1,454	0,482	1,518	3,640	0,2747	0,738	1,426	5,854	0,392	1,608
19	0,688	0,717	0,187	0,9599	1,0418	0,477	1,443	0,497	1,503	3,689	0,2711	0,733	1,490	5,888	0,404	1,596
20	0,671	0,697	0,180	0,9619	1,0396	0,491	1,433	0,510	1,490	3,735	0,2677	0,729	1,548	5,922	0,414	1,586
21	0,655	0,679	0,173	0,9638	1,0376	0,504	1,424	0,523	1,477	3,778	0,2647	0,724	1,606	5,950	0,425	1,575
22	0,640	0,662	0,167	0,9655	1,0358	0,516	1,415	0,534	1,466	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,647	0,162	0,9670	1,0342	0,527	1,407	0,545	1,455	3,858	0,2592	0,726	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,632	0,157	0,9684	1,0327	0,538	1,399	0,555	1,445	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,452	1,548
25	0,600	0,619	0,153	0,9696	1,0313	0,548	1,392	0,564	1,435	3,931	0,2544	0,709	1,804	6,058	0,459	1,541

n = Número de observações na amostra

# CARTAS DE CONTROLE

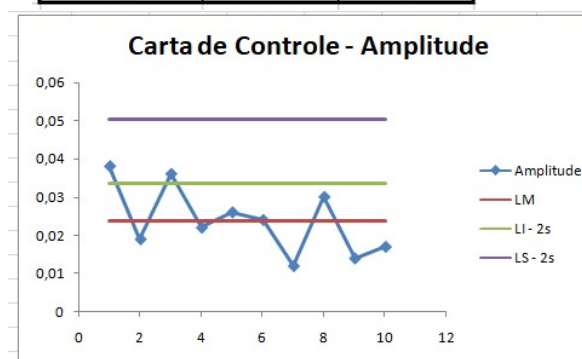
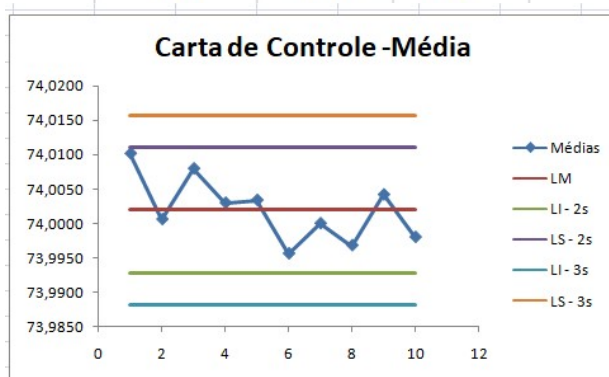
## Carta de controle da média e amplitude

	Linha Central	Limites
$\bar{X}$	$\bar{\bar{X}}$	$\bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$
$R$	$\bar{R}$	$D_4 \bar{R} e D_3 \bar{R}$

Amostra	Medidas (mm)					Média	Média Geral	R	R <sub>médio</sub>	Carta da Média				Carta Amplitude	
										2σ		3σ		2σ	3σ
										LI	LS	LI	LS	LS	LS
1	74,03	74,002	74,019	73,992	74,008	74,0102	74,0020	0,038	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503
2	73,995	73,992	74,001	74,011	74,004	74,0006	74,0020	0,019	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002	74,0080	74,0020	0,036	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503
4	74,002	73,996	73,993	74,015	74,009	74,0030	74,0020	0,022	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503
5	73,992	74,007	74,015	73,989	74,014	74,0034	74,0020	0,026	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503
6	74,009	73,994	73,997	73,985	73,993	73,9956	74,0020	0,024	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503
7	73,995	74,006	73,994	74	74,005	74,0000	74,0020	0,012	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503
8	73,985	74,003	73,993	74,015	73,988	73,9968	74,0020	0,03	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503
9	74,008	73,995	74,009	74,005	74,004	74,0042	74,0020	0,014	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503
10	73,998	74	73,99	74,007	73,995	73,9980	74,0020	0,017	0,0238	73,9928	74,0111	73,9882	74,0157	0,0336	0,0503

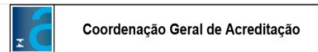
A2	2σ	3σ
	A <sub>2</sub> R <sub>médio</sub>	
0,577	0,0092	0,014

A2	2σ	3σ
	A <sub>2</sub> R <sub>médio</sub>	
0,577	0,0092	0,014



## Escore z (z-score)

### DOQ-CGRE-008- 2016 Orientações sobre validação de métodos analítico



ORIENTAÇÃO SOBRE VALIDAÇÃO DE  
MÉTODOS ANALÍTICOS  
Documento de caráter orientativo

DOQ-CGRE-008

Revisão 07 – Julho 2018

8.2.8.1 Escore z (z-score) O índice z é também um modo de avaliar o desempenho do laboratório em comparações interlaboratoriais.

$$z = \frac{X_{lab} - X_{ref}}{s}$$

Onde:  $X_{lab}$  é valor obtido pelo laboratório;  $X_{ref}$  é valor admitido como verdadeiro;  $s$  : desvio padrão do ensaio de proficiência.

A avaliação é feita com o seguinte critério de decisão, de acordo com a ABNT NBR ISO/IEC 17043:

$z \leq 2$  resultado satisfatório       $2 < z \leq 3$  resultado questionável;       $z > 3$  resultado insatisfatório

# LITERATURAS

---

- ABNT NBR ISO/IEC 17025 2017- Requisitos gerais para competência de laboratórios de ensaio e calibração.
- ISO 7870-2-2013- Control charts – Part 2 – Shewhart control charts
- ORIENTAÇÃO SOBRE VALIDAÇÃO DE MÉTODOS ANALÍTICOS Documento de caráter orientativo - DOQ-CGCRE-008 - Revisão 07 – Julho 2018
- Couto, Paulo Roberto Guimarães Estimativa da incerteza da massa específica da gasolina pelo ISO GUM 95 e método de Monte Carlo e seu impacto na transferência de custódia / Paulo Roberto Guimarães Couto. Rio de Janeiro, 2006. xxi,122 f. il. color
- KU, H. H. Precision Measurement and Calibration . NBS Special Publication 300-Volume 1. United States Department of Commerce – National Bureau Of Standards – February 1969. 425p
- MASSART, D.L.; VANDEGINSTE, B. M. G.; BUYDENS, L. M. C.; JONG, S.; LEWI. P. J.; SMEYERS-VERBEKE, J. Handbook of Chemometrics and Qualimetrics. Part A. Volume 20A. Elsevier Science B.V. 1997.867p
- MILLER, J .C.; MILLER, J .N. Statistics for Analytical Chemistry. Jonh Willey & Sons.1986.202p
- MONTGOMERY, D.C. Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade. Quarta Edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. 2003.513p.
- MONTGOMERY, D .C.; RUNGER, G.C. Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros Segunda Edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. 2003.461p
- NATRELLA, M.G. Experimental Statistics. National Bureau of Standards Handbook 91.1963
- ROYSTON, J.P. An Extension of Shapiro and Wilk's W Test for Normality to Large Samples. Appl Statisc (1982), 31, No 2, pp.115-124
- SHAPIRO, S.S.; WILK, M .B. An analysis of variance test for normality (complete samples) Biometrika (1965),52,3 and 4,p.591
- TAYLOR, J.K. Quality Assurances of Chemical Measurements. Lewis Publishers. 1987.328p
- TRIOLA, M. F. Introdução à Estatística. Sétima Edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.1999.410p
- WESLEY BARNES, J. Statistical Analysis for Engineeers and Scientists. A computer Approach. McGraw-Hill Companies. February 1994.396p

---

## Contato:

- Paulo Roberto Guimarães Couto – [plrcouto@yahoo.com.br](mailto:plrcouto@yahoo.com.br)
- Jailton C Damasceno - [jcdamasceno@outlook.com](mailto:jcdamasceno@outlook.com)